

**UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS**

**FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS**

**E.A.P. DE MATEMÁTICA**

**Sobre el Teorema del Flujo Tubular y el Teorema de  
Frobenius**

**TESIS**

**Para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática**

**AUTOR**

**Miguel Alfredo Cutimanco Panduro**

**ASESOR**

**Edgar Vera Saravia**

**Lima – Perú**

**2007**

# **Sobre el Teorema del Flujo Tubular y el Teorema de Frobenius**

**Miguel Alfredo Cutimanco Panduro**

Tesis presentada a consideración del Cuerpo Docente de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, como parte de los requisitos necesarios para obtener el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Aprobada por

.....

Dr. Renato M. Benazic Tomé

.....

Mg. Tomás Núñez Lay

.....

Dr. Édgar D. Vera Saravia

Lima-Perú

Julio-2007

## FICHA CATALOGRÁFICA

CUTIMANCO PANDURO, MIGUEL ALFREDO

Sobre el Teorema del Flujo Tubular y el Teorema de Frobenius

(Lima)2007

ix, 84p.,29.7cm,(UNMSM,Licenciado, Matemática,2007).

Tesis, Universidad Nacional Mayor de San Marcos,

Facultad de Ciencias Matemáticas 1.Matemática

I.UNMSM/FdeCM II.Título (Serie).

## **Agradecimientos**

Agradezco al profesor Dr. Edgar Vera Saravia por su apoyo incondicional, consejos y sugerencias en la realización de este trabajo, su ejemplo es para mí una motivación constante.

Agradezco también a los profesores Mg. Tomás Núñez Lay y Dr. Renato Benazic Tomé por su buena disposición para leer el trabajo y hacerle las observaciones respectivas.

A la profesora Dra. Roxana López Cruz, por haberme brindado las facilidades para cumplir con los requerimientos administrativos necesarios mientras fue Directora de la EAP. de Matemáticas y aún después.

Al profesor Dr. Alfonso Pérez Salvatierra, actual Director de la EAP. de Matemáticas, por el apoyo mostrado.

Finalmente, a mi familia, por el cariño prodigado en cada instante de mi vida, siempre estaré feliz de pertenecer a ella.

## RESUMEN

### SOBRE EL TEOREMA DEL FLUJO TUBULAR Y EL TEOREMA DE FROBENIUS

MIGUEL ALFREDO CUTIMANCO PANDURO

JULIO-2007

Asesor: Dr.Édgar Vera Saravia

Título obtenido: Licenciado en Matemática

---

El presente trabajo tiene por objetivo presentar una versión del Teorema del Flujo Tubular que sirva de motivación para introducir objetos geométricos como fibrado tangente, subfibrado tangente,  $X$ -foliación, entre otros. Esta presentación resulta ser el caso 1-dimensional del Teorema de Frobenius, lo que nos permitirá ver con claridad qué tipo de problema es el que resuelve dicho teorema, facilitando la comprensión del caso  $k$ -dimensional de tan importante teorema.

# ABSTRACT

## ABOUT THE TUBULAR FLOW THEOREM AND THE FROBENIUS THEOREM

MIGUEL ALFREDO CUTIMANCO PANDURO

JULY-2007

Advisor: Dr.Édgar Vera Saravia

Obtained Grade: Bachelor in Mathematics

---

The objective of this work is to present a version of the Tubular Flow Theorem that motivates the introduction of geometric objects such as: tangent bundle, tangent subbundle,  $X$ -foliation, etc. This presentation becomes the 1-dimensional case of the Frobenius Theorem, which will let us see what kind of problem this theorem solves, in order to improve the comprehension of the  $k$ -dimensional case of such as important theorem.

# Índice General

<b>1</b>	<b>Sobre el concepto de Variedad diferenciable</b>	<b>2</b>
1.1	Variedades diferenciables . . . . .	5
1.2	Una topología sobre $M$ . . . . .	7
1.3	Sobre el fibrado tangente de una variedad . . . . .	11
1.3.1	El espacio tangente de $M$ en $p$ . . . . .	13
1.3.2	La estructura de variedad del fibrado tangente . . . . .	18
1.4	Morfismos entre variedades . . . . .	24
1.4.1	Aplicaciones diferenciables . . . . .	24
1.4.2	Morfismo tangente . . . . .	29
<b>2</b>	<b>El teorema del flujo tubular</b>	<b>37</b>
2.1	Un teorema de existencia de EDO . . . . .	37
2.2	Campos vectoriales . . . . .	38
2.2.1	Versión local de un campo vectorial . . . . .	39
2.3	El teorema del flujo tubular . . . . .	42

2.4	Curvas integrales sobre una variedad . . . . .	55
2.4.1	Existencia de curvas integrales en $M$ . . . . .	56
2.4.2	Curvas integrales y conexidad . . . . .	59
2.4.3	1-Foliaciones de una Variedad . . . . .	63
<b>3</b>	<b>Sobre fibrados vectoriales. A modo de conclusión</b>	<b>69</b>
3.1	Sobre fibrados y subfibrados vectoriales . . . . .	70
3.1.1	Fibrados vectoriales . . . . .	70
3.1.2	Otro ejemplo de fibrado vectorial . . . . .	74
3.1.3	Subfibrado vectorial . . . . .	79
3.2	El teorema unidimensional de Frobenius . . . . .	80
3.3	Conclusiones . . . . .	82



# Índice de Figuras

1.1	Una interpretación de $T\varphi$	23
2.1	La aplicación $\Phi$	43
2.2	Trasladando el problema al origen	45
2.3	Los puntos $(t, y), t \in ]-\epsilon, \epsilon[$ son llevados en curvas integrales	47
2.4	La aplicación $\psi$	47
2.5	Segmentos paralelos al eje $e^1$ son llevados en curvas integrales	48
2.6	La construcción de $\varphi$	49
2.7	El teorema del flujo tubular	52
2.8	El cambio de coordenadas en $\mathcal{A}_1(M)$	53
2.9	Definición de la curva integral $c$	57
3.1	El cambio de coordenadas	77

# Introducción

El presente trabajo tiene por objetivo presentar una versión del Teorema del Flujo Tubular que sirva de motivación para introducir objetos geométricos como fibrado tangente, subfibrado tangente,  $X$ -foliación, entre otros. Esta presentación resulta ser el caso unidimensional del Teorema de Frobenius, lo que nos permitirá ver con claridad qué tipo de problema es el que resuelve dicho teorema, facilitando la comprensión del caso  $k$ -dimensional de tan importante teorema.

En el primer capítulo, sentaremos las bases para el trabajo y definiremos los conceptos de variedad y fibrado tangente, entre otros. En el segundo capítulo, daremos una demostración del teorema del flujo tubular e introduciremos las nociones topológicas y geométricas asociadas con él. Finalmente, en el tercer capítulo, reescribiremos el teorema del flujo tubular de tal forma que resulte el caso unidimensional del teorema de Frobenius y nos permita plantear el problema que éste resuelve en el caso  $k$ -dimensional.

# Capítulo 1

## Sobre el concepto de Variedad diferenciable

En este capítulo nos proponemos definir los conceptos de variedad diferenciable, fibrado tangente y morfismo entre variedades los cuales servirán de glosario básico para el presente trabajo.

Empezaremos con una caracterización alternativa de espacio vectorial, la que nos servirá para definir el importante concepto de espacio tangente de una variedad  $M$  en un punto  $p : T_p M$ .

**Proposición 1.1.** *Un conjunto  $V \neq \emptyset$  es un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial de dimensión  $m \in \mathbb{N}$  si y sólo si existen dos familias no vacías de funciones:*

1.  $\mathcal{A}(V) \subseteq \mathcal{B}(V, m) \equiv \{\text{biyecciones de } V \text{ sobre } \mathbb{R}^m\}$
2.  $\mathcal{G}(V) \subseteq GL(m)$  subgrupo del grupo lineal de  $\mathbb{R}^m$

tal que se cumple

$$\varphi, \psi \in \mathcal{A}(V) \implies \psi \circ \varphi^{-1} \in \mathcal{G}(V) \quad (1.1)$$

La condición (1.1) está expresada en el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} & V & \\ \varphi \swarrow & & \searrow \psi \\ \mathbb{R}^m & \xrightarrow{\psi \circ \varphi^{-1}} & \mathbb{R}^m \end{array}$$

### Prueba

**Condición Necesaria.** Consideremos como elementos de  $\mathcal{A}(V)$  a los isomorfismos lineales determinados por cada base  $\{v^1, \dots, v^m\} \subseteq V$  mediante la aplicación  $\varphi$

$$\begin{array}{ccc} \varphi : V & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ v^i & \longmapsto & \varphi(v^i) = e^i \end{array}$$

donde  $\{e^1, \dots, e^m\}$  es base canónica de  $\mathbb{R}^m$ .

$\mathcal{G}(V)$  será el subgrupo de  $GL(m)$  generado por  $\{\psi \varphi^{-1} : \varphi, \psi \in \mathcal{A}(V)\}$ .

**Condición Suficiente.** Definamos en  $V$  las operaciones de suma y producto por un escalar

$$\begin{array}{ccc} + : V \times V & \longrightarrow & V \\ (u, v) & \longmapsto & u + v \end{array}$$

definida por

$$u + v := \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(v))$$

y

$$\begin{array}{ccc} \bullet : \mathbb{R} \times V & \longrightarrow & V \\ (\lambda, v) & \longmapsto & \lambda \bullet v \end{array}$$

definida por

$$\lambda \bullet v := \varphi^{-1}(\lambda \varphi(v))$$

para alguna  $\varphi \in \mathcal{A}(V)$ .

Donde  $\varphi(u) + \varphi(v)$  es la suma en  $\mathbb{R}^m$  y  $\lambda \varphi(v)$  es el producto escalar en  $\mathbb{R}^m$ .

La definición de la operación  $+$  no depende de  $\varphi$ . En efecto, sea  $\psi$  otro elemento de  $\mathcal{A}(V)$ , como  $\varphi\psi^{-1} \in GL(m)$

$$\begin{aligned} \psi^{-1}(\psi(u) + \psi(v)) &= \varphi^{-1}(\varphi\psi^{-1})(\psi(u) + \psi(v)) \\ &= \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(v)) \\ &= u + v \end{aligned}$$

por lo tanto la definición de  $+$  no depende del elemento de  $\mathcal{A}(V)$  tomado.

Análogamente, si  $\psi$  es otro elemento de  $\mathcal{A}(V)$

$$\begin{aligned} \psi^{-1}(\lambda\psi(v)) &= \varphi^{-1}(\varphi\psi^{-1})(\lambda\psi(v)) \\ &= \varphi^{-1}(\lambda\varphi(v)) \\ &= \lambda \bullet v \end{aligned}$$

por lo tanto, la definición de  $\bullet$  no depende del elemento de  $\mathcal{A}(V)$  tomado.

Finalmente, como  $\varphi\psi^{-1}(0) = 0$  si y sólo si  $\psi^{-1}(0) = \varphi^{-1}(0)$ , definimos  $0 \in V$  como  $0 := \varphi^{-1}(0)$ . A partir de las definiciones de  $+$  y  $\bullet$  en  $V$  se pueden reproducir todas las propiedades de espacio vectorial, lo cual concluye la prueba.

## 1.1 Variedades diferenciables

**Definición 1.1.** Una función  $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  es un  $n$ -difeomorfismo local (de clase  $C^\infty$ ) si para cada  $x \in \mathbb{R}^n$  existe  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  abierto con  $x \in U$  tal que  $f(U)$  es abierto en  $\mathbb{R}^n$  y  $f|_U : U \longrightarrow f(U)$  es un difeomorfismo de clase  $C^\infty$ .

**Notacion 1.1.**  $\mathcal{D}_{loc}^\infty(n) := \{f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n : f \text{ es } n\text{-difeomorfismo local de clase } C^\infty\}$

indicará la familia de todos los  $n$ -difeomorfismos locales.

**Definición 1.2.** Sea  $M$  un conjunto no vacío. Una función  $g : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$  es una biyección local si para cada  $x \in M$  existe  $U \subseteq M$  con  $x \in U$  tal que  $g(U)$  es abierto en  $\mathbb{R}^n$  y  $g|_U : U \longrightarrow g(U)$  es una biyección.

**Notacion 1.2.**  $\mathcal{B}_{loc}(M, n) := \{f : M \longrightarrow \mathbb{R}^n : f \text{ es biyección local}\}$

indicará la familia de todas las biyecciones locales.

**Definición 1.3 (Pseudogrupo).**  $\mathfrak{S} \subseteq \mathcal{D}_{loc}^\infty(n)$  es llamado pseudogrupo si cumple las siguientes condiciones:

1. Si  $\sigma \in \mathfrak{S}$  entonces  $\sigma^{-1} \in \mathfrak{S}$ .
2. Si  $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}$  y  $\exists \tau \circ \sigma$  entonces  $\tau \circ \sigma \in \mathfrak{S}$ .

3. Si  $\sigma \in \mathfrak{S}$  y  $A \subseteq \text{Dom}(\sigma)$  es abierto, entonces  $\sigma|A \in \mathfrak{S}$ .
4. Dada  $\sigma \in \mathcal{B}_{loc}(\mathbb{R}^n; n)$ , si  $\text{Dom}(\sigma)$  es abierto en  $\mathbb{R}^n$ ,  
 $\forall x \in \text{Dom}(\sigma) \exists A$ , abierto de  $\mathbb{R}^n$ , tal que  $x \in A \subseteq \text{Dom}(\sigma)$  y  $\sigma|A \in \mathfrak{S}$   
 entonces  $\sigma \in \mathfrak{S}$ .

**Definición 1.4 (n-variedad  $C^\infty$ ).** Un conjunto  $M \neq \emptyset$  es llamado una  $n$ -variedad  $C^\infty$  (o una variedad  $C^\infty$  de dimensión  $n$ ) si existen dos familias no vacías de funciones,  $\mathcal{A}(M) \subseteq \mathcal{B}_{loc}(M, n)$  y  $\mathfrak{S}(M) \subseteq \mathcal{D}_{loc}^\infty(n)$  un pseudogruppo, tales que se cumplen:

1.  $M = \bigcup_{\varphi \in \mathcal{A}(M)} \text{Dom}(\varphi)$ .
2. Si  $\varphi, \psi \in \mathcal{A}$  y  $\text{Dom}(\varphi) \cap \text{Dom}(\psi) \neq \emptyset$  entonces  $\psi \circ \varphi^{-1} \in \mathfrak{S}(M)$ .

**Observaciones:**

1. Haremos referencia a la definición anterior diciendo que  $M$  es una  $n$ -variedad  $C^\infty$  con atlas  $\mathcal{A}(M)$  y pseudogruppo  $\mathfrak{S}(M)$ .
2. Los elementos de  $\mathcal{A}(M)$  son llamados cartas locales o sistemas de coordenadas de  $M$ .
3. Los elementos de  $\mathfrak{S}(M)$  son llamados cambios de cartas o cambios de coordenadas de  $M$ .
4. En el contexto anterior, diremos que  $M$  es una variedad modelada en  $\mathbb{R}^n$  o con  $\mathbb{R}^n$  como espacio modelo.

5. La idea de tener  $\mathcal{A}(M)$  y  $\mathfrak{S}(M)$  es la siguiente:  $\mathfrak{S}(M)$  determina la estructura de  $\mathbb{R}^n$  que se desea transferir a  $M$  y las cartas de  $\mathcal{A}(M)$  el modo de efectuar esa transferencia.

## 1.2 Una topología sobre $M$

La definición de una topología sobre  $M$  se resuelve con el siguiente teorema que provee a  $M$  de una familia de abiertos inducida por  $\mathcal{A}(M)$ .

**Teorema 1.1.** *Sea  $M$  una  $n$ -variedad. Si se cumple, uno u otro:*

*i. Dados  $x, y \in M$ , existe  $\varphi \in \mathcal{A}(M)$  tal que  $x, y \in \text{Dom}(\varphi)$*

*o*

*ii. Existen  $\varphi, \psi \in \mathcal{A}(M)$  con  $\text{Dom}(\varphi) \cap \text{Dom}(\psi) = \emptyset$  tal que  $x \in \text{Dom}(\varphi)$  y  $y \in \text{Dom}(\psi)$*

*entonces existe una única topología de Hausdorff en  $M$  tal que para todo  $\varphi \in \mathcal{A}(M)$  se tiene que  $\text{Dom}(\varphi)$  es abierto y  $\varphi$  un homeomorfismo de  $\text{Dom}(\varphi)$  sobre  $\text{Im}(\varphi)$ .*

**Prueba.**

- Existencia.

Consideremos  $\tau = \{A \subseteq M : \forall \varphi \in \mathcal{A}(M), \varphi(A) \text{ es abierto en } \mathbb{R}^n\}$ .

Afirmamos que  $\tau$  es una topología sobre  $M$ . En efecto, sea  $\varphi \in \mathcal{A}(M)$

- $\varphi(M) = \varphi(M \cap \text{Dom}(\varphi)) = \varphi(\text{Dom}(\varphi)) = \text{Im}(\varphi)$  que es abierto en  $\mathbb{R}^n$  pues  $\varphi \in \mathcal{A}(M)$ . Así,  $M \in \tau$ .



–  $\varphi(\emptyset) = \emptyset$  es abierto en  $\mathbb{R}^n$ , por lo tanto  $\emptyset \in \tau$ .

– Sea  $\{\Theta_i\}_{i \in I} \subseteq \tau$ , consideremos  $\bigcup_{i \in I} \Theta_i$ .

$$\begin{aligned} \varphi\left(\bigcup_{i \in I} \Theta_i\right) &= \varphi\left(\bigcup_{i \in I} \Theta_i \cap \text{Dom}(\varphi)\right) = \varphi\left(\bigcup_{i \in I} (\Theta_i \cap \text{Dom}(\varphi))\right) = \\ &= \bigcup_{i \in I} \varphi(\Theta_i \cap \text{Dom}(\varphi)) = \bigcup_{i \in I} \varphi(\Theta_i) \text{ como } \varphi(\Theta_i) \text{ es abierto en } \mathbb{R}^n \forall i \in I, \\ &\text{se tiene que } \bigcup_{i \in I} \varphi(\Theta_i) \text{ es abierto en } \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Así,  $\bigcup_{i \in I} \Theta_i \in \tau$ .

– Sean  $\Psi, \Omega \in \tau$  y  $\varphi \in \mathcal{A}(M)$ , consideremos  $\Psi \cap \Omega$ , entonces

$$\begin{aligned} \varphi(\Psi \cap \Omega) &= \varphi(\Psi \cap \Omega \cap \text{Dom}(\varphi)) = \\ &= \varphi((\Psi \cap \text{Dom}(\varphi)) \cap (\Omega \cap \text{Dom}(\varphi))) = \\ &= \varphi((\Psi \cap \text{Dom}(\varphi))) \cap \varphi((\Omega \cap \text{Dom}(\varphi))) = \varphi(\Psi) \cap \varphi(\Omega). \end{aligned}$$

Como  $\varphi(\Psi) \cap \varphi(\Omega)$  que es abierto en  $\mathbb{R}^n$  se tiene que  $\Psi \cap \Omega \in \tau$ .

Mostremos ahora, que  $\text{Dom}(\varphi) \in \tau \forall \varphi \in \mathcal{A}(M)$ .

Sea  $\psi \in \mathcal{A}(M)$ , entonces  $\psi(\text{Dom}(\varphi)) = \psi(\text{Dom}(\varphi) \cap \text{Dom}(\psi))$ .

Si  $\text{Dom}(\varphi) \cap \text{Dom}(\psi) = \emptyset$  no hay nada que probar.

Supongamos que  $\text{Dom}(\varphi) \cap \text{Dom}(\psi) \neq \emptyset$ , y consideremos el siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccc} & \text{Dom}(\varphi) \cap \text{Dom}(\psi) & \\ \swarrow \varphi & & \searrow \psi \\ \varphi(\text{Dom}(\varphi) \cap \text{Dom}(\psi)) & \overset{\psi \circ \varphi^{-1}}{\dashrightarrow} & \psi(\text{Dom}(\varphi) \cap \text{Dom}(\psi)) \end{array}$$

Como  $\psi \circ \varphi^{-1} \in \mathfrak{S}(M) \subseteq \mathcal{D}_{loc}^\infty(n)$  entonces  $Dom(\psi \circ \varphi^{-1})$  e  $Im(\psi \circ \varphi^{-1})$  son abiertos en  $\mathbb{R}^n$ .

Luego,  $\psi(Dom(\varphi) \cap Dom(\psi)) = Im(\psi \circ \varphi^{-1})$  es abierto en  $\mathbb{R}^n$ , por lo tanto,  $Dom(\varphi) \in \tau$ .

Mostremos ahora que  $\varphi : Dom(\varphi) \longrightarrow Im(\varphi)$  es un homeomorfismo.

Para esto verificaremos que  $\varphi$  es continua y a la vez una aplicación abierta.

- Continuidad de  $\varphi$ . Sea  $\Theta$  un abierto en  $Im(\varphi)$ , entonces  $\Theta$  es abierto en  $\mathbb{R}^n$ . Debemos probar que  $\varphi^{-1}(\Theta)$  es abierto en  $Dom(\varphi)$  o en forma equivalente, dado  $\psi \in \mathcal{A}(M)$ , probar que  $\psi(\varphi^{-1}(\Theta))$  es abierto en  $\mathbb{R}^n$  :

$$\begin{aligned} \psi(\varphi^{-1}(\Theta)) &= \psi(\varphi^{-1}(\Theta) \cap Dom(\psi)) = \psi([\varphi^{-1}(\Theta) \cap Dom(\varphi)] \cap \\ &Dom(\psi)) = \psi \circ \varphi^{-1}(\Theta \cap \varphi(Dom(\varphi) \cap Dom(\psi))). \end{aligned}$$

Pero  $\Theta$  es abierto en  $\mathbb{R}^n$  y  $\varphi(Dom(\varphi) \cap Dom(\psi))$  es abierto en  $Im(\varphi)$ , por tanto abierto en  $\mathbb{R}^n$ .

Como  $\psi \circ \varphi^{-1} \in \mathfrak{S}(M)$  entonces  $\psi \circ \varphi^{-1}(\Theta \cap \varphi(Dom(\varphi) \cap Dom(\psi)))$  es abierto en  $Im(\psi \circ \varphi^{-1})$  que es abierto en  $\mathbb{R}^n$ , por lo tanto, es abierto en  $\mathbb{R}^n$ , así,  $\psi(\varphi^{-1}(\Theta))$  es abierto en  $\mathbb{R}^n$ , luego,  $\varphi^{-1}(\Theta) \in \tau$  y así,  $\varphi$  es continua.

- $\varphi$  es una aplicación abierta. Sea  $U \subseteq Dom(\varphi)$  tal, que  $U \in \tau$ ,

entonces  $\varphi(U)$  es abierto en  $\mathbb{R}^n$  y  $\varphi(U) \subseteq \varphi(Dom(\varphi)) = Im(\varphi)$ ,

luego  $\varphi(U) = \varphi(U) \cap Im(\varphi)$  es abierto en  $Im(\varphi)$ .

- Unicidad.

Sea  $\eta$  otra topología definida sobre  $M$  tal que  $(Dom(\varphi))_{\varphi \in \mathcal{A}(M)} \subseteq \eta$  y

$\varphi : (Dom(\varphi), \eta) \longrightarrow (Im(\varphi), \eta)$  sea un homeomorfismo. Probemos que

$\tau = \eta$ .

–  $\eta \subseteq \tau$ . Sea  $U \in \eta$  entonces  $U \cap Dom(\varphi) \in \eta$ , luego  $\varphi(U) =$

$\varphi(U \cap Dom(\varphi))$  es abierto en  $Im(\varphi)$  que es abierto en  $\mathbb{R}^n$ ; así,

$U \in \tau$  y por lo tanto  $\eta \subseteq \tau$ .

–  $\tau \subseteq \eta$ . Sea  $V \in \tau$ ,  $\varphi(V) = \varphi(V \cap Dom(\varphi))$  es abierto en  $Im(\varphi)$

porque  $\varphi$  es homeomorfismo en la topología  $\tau$ . Como  $\varphi$  es también

homeomorfismo en la topología  $\eta$  se tiene que  $V \cap Dom(\varphi) \in \eta$ ,

luego,  $V = V \cap M = V \cap \bigcup_{\varphi \in \mathcal{A}} Dom(\varphi) = \bigcup_{\varphi \in \mathcal{A}} (V \cap Dom(\varphi)) \in \eta$ .

Así,  $\tau \subseteq \eta$ .

- $\tau$  es de Hausdorff. En efecto, sean  $x, y \in M$

– Supongamos  $\exists \varphi \in \mathcal{A}(M)$  tal que  $x, y \in Dom(\varphi)$ . Como  $Im(\varphi)$

es Hausdorff, existen  $U$  abierto en  $Im(\varphi)$  conteniendo  $\varphi(x)$  y  $V$

abierto en  $Im(\varphi)$  conteniendo  $\varphi(y)$  tal que  $U \cap V = \emptyset$ . Como  $\varphi$

es homeomorfismo  $\varphi^{-1}(U)$  y  $\varphi^{-1}(V)$  son abiertos en  $Dom(\varphi)$  y

$\varphi^{-1}(U) \cap \varphi^{-1}(V) = \emptyset$ . En efecto, si existiese un punto en común

$U \cap V \neq \emptyset$ , un absurdo.

- Supongamos  $\exists \varphi, \psi \in \mathcal{A}(M)$  tal que  $Dom(\varphi) \cap Dom(\psi) = \emptyset$  con  $x \in Dom(\varphi)$  y  $y \in Dom(\psi)$  no hay nada que probar porque  $Dom(\varphi)$  y  $Dom(\psi)$  ambos pertenecen a  $\tau$ .

### 1.3 Sobre el fibrado tangente de una variedad

**Definición 1.5 (Espacio tangente en  $\mathbb{R}^n$ ).** Dado  $\mathbb{R}^n$  y  $p \in \mathbb{R}^n$ ,

$T_p\mathbb{R}^n := \{p\} \times \mathbb{R}^n$  es llamado espacio tangente de  $p$  en  $\mathbb{R}^n$ .

Si definimos en  $T_p\mathbb{R}^n$  :

$$\alpha(p, v) + \beta(p, w) = (p, \alpha v + \beta w)$$

con  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  y  $(p, v), (p, w) \in T_p\mathbb{R}^n$ , se tiene que  $T_p\mathbb{R}^n$  es un espacio vectorial  $n$ -dimensional.

**Definición 1.6.** Una función  $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$  es localmente diferenciable de clase  $C^\infty$  si para cada  $x \in \mathbb{R}^m$  existe  $U \subseteq \mathbb{R}^m$  abierto con  $x \in U$  tal que  $f|U : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$  es de clase  $C^\infty$ .

**Notacion 1.3.**  $\mathcal{C}_{loc}^\infty(m, n) := \{f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n : f \text{ es localmente diferenciable de clase } C^\infty\}$

$\mathcal{C}_{loc}^\infty(m, n)$  indicará la familia de todas las funciones localmente diferenciable de clase  $C^\infty$ .

**Definición 1.7.** Dados  $F \in \mathcal{C}_{loc}^\infty(m, n)$  y  $p \in \text{Dom}(F)$  abierto, definimos la función

$$T_p F : T_{(p, v)} \mathbb{R}^n \xrightarrow{\quad} (T_{F(p)} \mathbb{R}^n, JF(p)[v])$$

donde  $JF(p)[v]$  es el jacobiano de  $F$  en el punto  $p$ .

**Notacion 1.4.**  $JF(p)[v] = F'(p)v = \partial_v F(p)$ .

**Observación** Dados  $F \in \mathcal{C}_{loc}^\infty(k, m), G \in \mathcal{C}_{loc}^\infty(m, n), p \in \text{Dom}(F)$  y  $F(p) \in \text{Dom}(G)$ , la regla de la cadena se interpretará como: La conmutatividad del diagrama

$$\begin{array}{ccc} & \text{Im}(F) \cap \text{Dom}(G) & \\ F \nearrow & & \searrow G \\ F^{-1}(\text{Im}(F) \cap \text{Dom}(G)) & \xrightarrow{\quad G \circ F \quad} & G(\text{Im}(F) \cap \text{Dom}(G)) \end{array}$$

implica la conmutatividad del diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & T_{F(p)} \mathbb{R}^m & \\ T_p F \nearrow & & \searrow T_{F(p)} G \\ T_p \mathbb{R}^k & \xrightarrow{\quad T_p G \circ F \quad} & T_{G \circ F(p)} \mathbb{R}^n \end{array}$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
T_p(G \circ F)(p, v) &= ((G \circ F)(p), J(G \circ F)(p)[v]) \\
&= (G(F)(p), [JG(F)(p) \circ JF(p)][v]) \\
&= (G(F)(p), JG(F)(p)(JF(p)[v])) \\
&= T_{F(p)}G(F(p), JF(p)[v]) \\
&= T_{F(p)}G \circ T_pF(p, v)
\end{aligned}$$

Por lo tanto,  $T_p(G \circ F)(p, v) = T_{F(p)}G \circ T_pF(p, v) \forall (p, v) \in T_p\mathbb{R}^k$ , así

$$T_p(G \circ F) = T_{F(p)}G \circ T_pF$$

### 1.3.1 El espacio tangente de M en p

Consideremos  $M$  una  $n$ -variedad, el conjunto  $M \times \mathcal{A}(M) \times \mathbb{R}^n$  y  $\sim$  la siguiente relación definida sobre  $M \times \mathcal{A}(M) \times \mathbb{R}^n$  mediante:

$$(p, \varphi, v) \sim (q, \psi, w) \iff p = q \in \text{Dom}(\varphi) \cap \text{Dom}(\psi) \text{ y } w = (\psi\varphi^{-1})'(\varphi(p))[v]$$

**Proposición 1.2.** *La relación  $\sim$  definida sobre  $M \times \mathcal{A}(M) \times \mathbb{R}^n$  es una relación de equivalencia.*

**Prueba**

- **Reflexividad:**  $(p, \varphi, v) \sim (q, \psi, w)$ . En efecto,

$$(\varphi\varphi^{-1})'(\varphi(p))[v] = Id'(\varphi(p))[v] = Id[v] = [v].$$

- **Simetría:**  $(p, \varphi, v) \sim (q, \psi, w)$  entonces  $(q, \psi, w) \sim (p, \varphi, v)$ . En efecto, por hipótesis  $p = q$  y  $w = (\psi\varphi^{-1})'(\varphi(p))[v]$ . Como  $\psi\varphi^{-1} \in \mathfrak{S}(M)$  entonces  $\varphi\psi^{-1} \in \mathfrak{S}(M)$ . Por lo tanto,  $(\psi\varphi^{-1})'(\varphi(p))$  es un isomorfismo lineal con inversa  $(\varphi\psi^{-1})'(\psi(p))$  por lo tanto  $v = \varphi\psi^{-1}(\psi(p))[w]$ .

Así,  $\sim$  es simétrica.

- **Transitividad** Supongamos  $(p, \varphi, v) \sim (q, \psi, w)$  y  $(q, \psi, w) \sim (s, \eta, u)$ .

Por hipótesis  $p = q = s$ . Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} & B & \\ \psi\varphi^{-1} \nearrow & & \searrow \eta\psi^{-1} \\ A & \xrightarrow{\eta\varphi^{-1}} & C \end{array}$$

con  $A, B, C$  abiertos apropiados de  $\mathbb{R}^n$ .

Gracias a la regla de la cadena podemos pasar de este diagrama conmutativo a este otro diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} & T_{\psi(p)}\mathbb{R}^n & \\ T_{\varphi(p)}(\psi\varphi^{-1}) \nearrow & & \searrow T_{\psi(p)}(\eta\psi^{-1}) \\ T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n & \xrightarrow{T_{\varphi(p)}(\eta\varphi^{-1})} & T_{\eta(p)}\mathbb{R}^n \end{array}$$

luego,

$$\begin{aligned} T_{\varphi(p)}(\eta\varphi^{-1})(\varphi(p), v) &= (\eta(p), J(\eta\varphi^{-1})(\varphi(p))[v]) \\ &= (\eta(p), J(\eta\psi^{-1}\psi\varphi^{-1})(\varphi(p))[v]) \end{aligned}$$

Pero,

$$\begin{aligned}
J(\eta\psi^{-1}\psi\varphi^{-1})(\varphi(p))[v] &= [J\eta\psi^{-1}(\psi\varphi^{-1}(\varphi(p))) \circ J\psi\varphi^{-1}(\varphi(p))][v] \\
&= J\eta\psi^{-1}(\psi(p))(J\psi\varphi^{-1}(\varphi(p))[v]) \\
&= J\eta\psi^{-1}(\psi(p))(w) \\
&= u
\end{aligned}$$

Así,

$$J(\eta\varphi^{-1})(\varphi(p))[v] = u$$

y  $(p, \varphi, v) \sim (s, \eta, u)$ .

Como  $\sim$  es de equivalencia, definimos el conjunto cociente de  $M \times \mathcal{A}(M) \times \mathbb{R}^m$  por la relación de equivalencia  $\sim$  como  $TM$ . Así,

$$TM = \frac{M \times \mathcal{A}(M) \times \mathbb{R}^m}{\sim}$$

Denotemos los elementos (clases de equivalencias) de  $TM$  por  $\langle p, \varphi, v \rangle$  y definamos la función

$$\begin{aligned}
\rho : TM &\longrightarrow M \\
\langle p, \varphi, v \rangle &\longmapsto \rho(\langle p, \varphi, v \rangle) = p
\end{aligned}$$

$\rho$  está bien definida, pues si  $\langle q, \tilde{\varphi}, w \rangle = \langle p, \varphi, v \rangle$  entonces,  $q = p$  y  $\rho(\langle q, \tilde{\varphi}, w \rangle) = q = p$ .



Consideremos  $\rho^{-1}(\{p\}) \subseteq TM$ . Explícitamente  $\rho^{-1}(\{p\}) = \{\langle p, \psi, v \rangle : (p, \psi, v) \in M \times \mathcal{A}(M) \times \mathbb{R}^m, p \in \text{Dom}(\psi)\}$

**Lema 1.1.** *Dado  $p \in M$ , para cada  $\varphi \in \mathcal{A}(M)$  con  $p \in \text{Dom}(\varphi)$  se cumple*

$$\rho^{-1}(\{p\}) = \{\langle p, \varphi, v \rangle : v \in \mathbb{R}^m\}$$

### Prueba

Será suficiente probar que

$$\rho^{-1}(\{p\}) \subseteq \{\langle p, \varphi, v \rangle : (p, \varphi, v) \in M \times \mathcal{A}(M) \times \mathbb{R}^m, p \in \text{Dom}(\varphi)\}$$

ya que claramente

$$\{\langle p, \varphi, v \rangle : (p, \varphi, v) \in M \times \mathcal{A}(M) \times \mathbb{R}^m, p \in \text{Dom}(\psi)\} \subseteq \rho^{-1}(\{p\}).$$

Sea  $\langle p, \psi, w \rangle \in \rho^{-1}(\{p\})$ .

Definimos  $v = (\varphi\psi^{-1})'(\psi(p))(w) \in \mathbb{R}^m$  entonces

$$\langle p, \psi, w \rangle = \langle p, \varphi, v \rangle \tag{1.2}$$

por lo tanto,  $\rho^{-1}(\{p\}) \subseteq \{\langle p, \varphi, v \rangle : (p, \varphi, v) \in M \times \mathcal{A}(M) \times \mathbb{R}^m, p \in \text{Dom}(\psi)\}$

**Observación** Afirmamos que fijado  $\varphi \in \mathcal{A}(M)$ ,  $w$  es el único elemento de  $\mathbb{R}^m$  que satisface la igualdad (1.2).

En efecto, sea  $\langle p, \varphi, v_1 \rangle = \langle p, \varphi, v_2 \rangle$ , entonces

$$\begin{aligned} v_2 &= (\varphi\varphi^{-1})'(\varphi(p))(v_1) \\ &= \mathbf{1}_{\mathbb{R}^m}(v_1) \\ &= v_1 \end{aligned}$$

**Proposición 1.3.** *Sea  $M$  una variedad  $m$ -dimensional. Para cada  $p \in M$ ,  $\rho^{-1}(\{p\})$  admite una estructura de  $m$ -espacio vectorial.*

**Prueba** Usaremos la proposición 1.1.

Sea  $\varphi \in \mathcal{A}(M)$ , asociemos a  $\varphi$  una función  $T_p\varphi$

$$\begin{array}{ccc} T_p\varphi : \rho^{-1}(\{p\}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ \langle p, \varphi, v \rangle & \longmapsto & v \end{array}$$

$T_p\varphi$  está bien definida. En efecto, supongamos  $\langle p, \varphi, v_1 \rangle = \langle p, \varphi, v_2 \rangle$ . Por la observación anterior,  $v_1 = v_2$ .

Definimos  $\mathcal{A}(\rho^{-1}(\{p\})) = \{T_p\varphi : \varphi \in \mathcal{A}(M), p \in \text{Dom}(\varphi)\}$ .

**Afirmamos que  $T_p\varphi$  es biyectiva.**

- $T_p\varphi$  es suryectiva.

Sea  $v \in \mathbb{R}^m$ . Por el lema (1.1) y la observación que le sigue, existe una

única clase  $\langle p, \varphi, v \rangle \in \rho^{-1}(\{p\})$  tal que  $T_p\varphi(\langle p, \varphi, v \rangle) = v$ .

- $T_p\varphi$  es inyectiva. Supongamos que

$$T_p\varphi(\langle p, \varphi, v_1 \rangle) = T_p\varphi(\langle p, \varphi, v_2 \rangle)$$

entonces  $v_1 = v_2$  y  $\langle p, \varphi, v_1 \rangle = \langle p, \varphi, v_2 \rangle$

Supongamos que  $\varphi, \psi \in \mathcal{A}(M)$  y  $\text{Dom}(\varphi) \cap \text{Dom}(\psi) \neq \emptyset$ . Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
& \rho^{-1}(p) & \\
T_p\varphi \swarrow & & \searrow T_p\psi \\
\mathbb{R}^m & \xleftarrow{T_p\psi(T_p\varphi)^{-1}} & \mathbb{R}^m
\end{array}$$

**Afirmamos que**  $T_p\psi(T_p\varphi)^{-1} \in GL(m)$  En efecto,

$$\begin{aligned}
T_p\psi(T_p\varphi)^{-1}(v) &= T_p\psi(\langle p, \varphi, v \rangle) \\
&= w
\end{aligned}$$

Por el lema (1.1),  $\langle p, \psi, w \rangle = \langle p, \varphi, v \rangle$ , es decir,

$$w = (\psi\varphi^{-1})'(\varphi(p))[v]$$

Por lo tanto,

$$T_p\psi(T_p\varphi)^{-1}(v) = (\psi\varphi^{-1})'(\varphi(p))[v]$$

Como  $(\psi\varphi^{-1})'(\varphi(p)) \in GL(m)$ , se tiene que  $T_p\psi(T_p\varphi)^{-1} \in GL(m)$ .

Definimos  $\mathcal{G}(\rho^{-1}(p))$  como el subgrupo de  $GL(m)$  generado por  $\{T_p\psi(T_p\varphi)^{-1} : \varphi, \psi \in \mathcal{A}(\rho^{-1}(p))\}$ .

De esta forma,  $\rho^{-1}(p)$  es un  $m$ -espacio vectorial.

**Definición 1.8.** En las condiciones anteriores, para cada  $p \in M$ ,  $\rho^{-1}(\{p\})$  es llamado el espacio tangente de  $M$  en  $p$  y será denotado por  $T_pM$ .

### 1.3.2 La estructura de variedad del fibrado tangente

Sea  $\varphi \in \mathcal{A}(M)$ . Definamos la aplicación:

$$T_p\varphi : T_p(M) \longrightarrow T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^m$$

$$\langle p, \varphi, v \rangle \longmapsto (\varphi(p), T_p\varphi(\langle p, \varphi, v \rangle)) = (\varphi(p), v)$$

Notemos que usamos  $T_p\varphi$ , tanto para la aplicación

$$T_p\varphi : T_p(M) \longrightarrow T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^m$$

como para la aplicación

$$T_p\varphi : T_p(M) \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

la diferencia entre ellas se hará clara de acuerdo al contexto.

Se prueba con facilidad, considerando la definición de  $T_p\varphi$ , que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} & T_p M & \\ T_p \varphi \swarrow & & \searrow T_p \psi \\ T_{\varphi(p)} \mathbb{R}^m & \xrightarrow{T_{\varphi(p)}(\psi \circ \varphi^{-1})} & T_{\psi(p)} \mathbb{R}^m \end{array}$$

es decir  $T_p\psi \circ (T_p\varphi)^{-1} = T_{\varphi(p)}(\psi \circ \varphi^{-1})$ . En efecto,

$$\begin{aligned} T_p\psi \circ (T_p\varphi)^{-1}(\varphi(p), v) &= T_p\psi(\langle p, \varphi, v \rangle) \\ &= (\psi(p), \lambda_\psi(\langle p, \varphi, v \rangle)) \\ &= (\psi(p), w) \end{aligned}$$

donde  $w$  es el único vector en  $\mathbb{R}^m$  tal que

$$\langle p, \psi, w \rangle = \langle p, \varphi, v \rangle$$

es decir

$$w = (\psi \circ \varphi^{-1})'(\varphi(p))[v]$$

De esta forma,

$$\begin{aligned}
T_p \psi \circ (T_p \varphi)^{-1}(\varphi(p), v) &= (\psi(p), (\psi \varphi^{-1})'(\varphi(p))[v]) \\
&= (\psi \varphi^{-1}(\varphi(p)), (\psi \varphi^{-1})'(\varphi(p))[v]) \\
&= T_{\varphi(p)}(\psi \varphi^{-1})(\varphi(p), v)
\end{aligned}$$

es decir,

$$T_p \psi \circ (T_p \varphi)^{-1} = T_{\varphi(p)}(\psi \varphi^{-1})$$

Definamos la familia

$$\mathcal{A}(TM) := \{T\varphi : \rho^{-1}(\text{Dom}(\varphi)) \longrightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m : \varphi \in \mathcal{A}(M)\}$$

donde  $T\varphi$  está definida de tal forma que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
\rho^{-1}(\text{Dom}(\varphi)) & \xrightarrow{T\varphi} & \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \\
\downarrow \rho & & \downarrow \pi_1 \\
\text{Dom}(\varphi) & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R}^m
\end{array}$$

es decir,  $\pi_1 \circ T\varphi = \varphi \circ \rho$ ; y  $T\varphi|_{T_p(M)} = T_p\varphi$ .

### Observaciones

1. Sea  $\langle p, \varphi, v \rangle \in T_p M$ . Entonces

$$\begin{aligned}
T\varphi(\langle p, \varphi, v \rangle) &= T_p \varphi(\langle p, \varphi, v \rangle) \\
&= (\varphi(p), \lambda_\varphi(\langle p, \varphi, v \rangle)) \\
&= (\varphi(p), v)
\end{aligned}$$

2. Veamos que el diagrama conmutativo nos dice lo mismo que fue dicho en la observación 1.

$$\rho^{-1}(Dom(\varphi)) \subseteq TM. \text{ Sea } \langle p, \varphi, v \rangle \in \rho^{-1}(Dom(\varphi)) \subseteq TM.$$

$$\text{Entonces, } \rho(\langle p, \varphi, v \rangle) = p \in Dom(\varphi) \subseteq M$$

Así,  $\varphi(p)$  está definido y  $\pi_1^{-1}(\varphi(p)) = (\varphi(p), v)$  es el valor que toma  $T\varphi(\langle p, \varphi, v \rangle)$ .

$$3. \text{ Claramente se tiene } \rho_1^{-1}(Dom(\varphi)) = \bigcup_{p \in Dom(\varphi)} T_p M$$

Afirmamos que  $\mathcal{A}(TM) \subseteq \mathcal{B}_{loc}(TM, \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m)$ . En efecto, sea  $\varphi \in \mathcal{A}(M)$ .

$$\begin{aligned} T\varphi : \rho^{-1}(Dom(\varphi)) &\longrightarrow Im(\varphi) \times \mathbb{R}^m \\ \langle p, \varphi, v \rangle &\longmapsto T\varphi(\langle p, \varphi, v \rangle) \end{aligned}$$

Como  $\langle p, \varphi, v \rangle \in T_p M$ , de la observación 1. se tiene que  $T\varphi(\langle p, \varphi, v \rangle) = (\varphi(p), \lambda_\varphi(\langle p, \varphi, v \rangle))$ .

Como cada componente es una biyección se tiene que  $T\varphi$  es una biyección local de  $TM$  en  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ . Por otro lado,  $Im(\varphi) \times \mathbb{R}^m$  es abierto en  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ ,

pues  $Im(\varphi)$  es abierto en  $\mathbb{R}^m$  y  $\bigcup_{\varphi \in \mathcal{A}(M)} \rho^{-1}(Dom(\varphi)) = TM$ .

Consideremos  $\mathfrak{S}(TM) = \mathfrak{S}(M) \times GL(m)$  con la siguiente operación:

- Sean  $(\sigma, s), (\tau, t) \in \mathfrak{S}(M) \times GL(m)$ . Definimos

$$(\sigma, s) \bullet (\tau, t) = (\sigma \circ \tau, s \circ t)$$

Claramente  $\mathfrak{S}(TM) = \mathfrak{S}(M) \times GL(m)$  es un pseudogrupo, donde  $(\sigma, s)^{-1} = (\sigma^{-1}, s^{-1}) \in \mathfrak{S}(TM)$ .

Supongamos ahora que  $Dom(T\varphi) \cap Dom(T\psi) \neq \emptyset$ .

Sea  $H = Dom(\varphi) \cap \rho^{-1}(Dom(\psi))$ , considerando el diagrama

$$\begin{array}{ccc} & \rho^{-1}(H) & \\ T\varphi \swarrow & & \searrow T\psi \\ \varphi(H) \times \mathbb{R}^m & \xrightarrow{T\psi \circ (T\varphi)^{-1}} & \psi(H) \times \mathbb{R}^m \end{array}$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} T\psi \circ (T\varphi)^{-1}(\varphi(p), v) &= T\psi(\langle p, \varphi, v \rangle) \\ &= T_p\psi(\langle p, \varphi, v \rangle) \\ &= (\psi(p), w) \end{aligned}$$

donde  $w$  es el único vector en  $\mathbb{R}^m$  tal que

$$\langle p, \psi, w \rangle = \langle p, \varphi, v \rangle$$

de donde

$$w = (\psi\varphi^{-1})'(\varphi(p))[v]$$

Luego,

$$T\psi \circ (T\varphi)^{-1}(\varphi(p), v) = (\psi\varphi^{-1}(\varphi(p)), (\psi\varphi^{-1})'(\varphi(p))[v])$$

es decir,  $T\psi \circ (T\varphi)^{-1} \in \mathfrak{S}(M) \times GL(m)$ .

Una interpretación del diagrama

$$\begin{array}{ccc}
\rho^{-1}(\text{Dom}(\varphi)) & \xrightarrow{T\varphi} & \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \\
\downarrow \rho & & \downarrow \pi_1 \\
\text{Dom}(\varphi) & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R}^m
\end{array}$$

se tiene en la siguiente figura si identificamos  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$  con  $T\mathbb{R}^m$

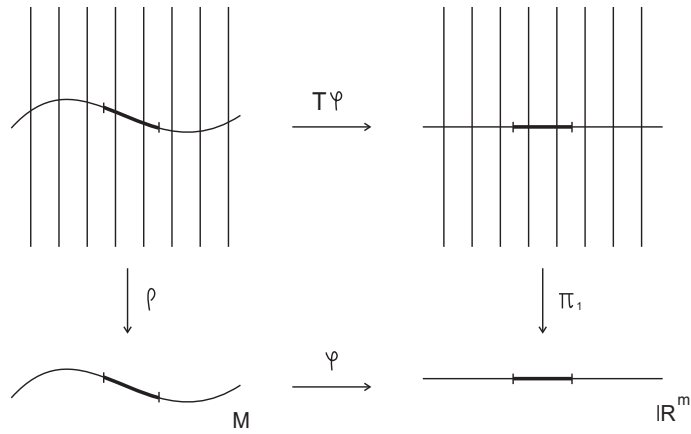


Figure 1.1: Una interpretación de  $T\varphi$

Recopilando lo dicho se tiene

**Lema 1.2.** Sea  $M$  una  $m$ -variedad.  $TM$  con las familias de funciones  $\mathcal{A}(TM) = \{T\varphi : \rho^{-1}(\text{Dom}(\varphi)) \longrightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m : \varphi \in \mathcal{A}(M)\}$  y pseudogruppo  $\mathfrak{S}(TM) = \mathfrak{S}(M) \times GL(m)$  es una  $2m$ -variedad de clase  $C^\infty$ .



## 1.4 Morfismos entre variedades

### 1.4.1 Aplicaciones diferenciables

**Definición 1.9 (Diferenciabilidad).** Sea  $M$  una  $m$ -variedad,  $N$  una  $n$ -variedad y  $f : M \rightarrow N$  una aplicación. Diremos que  $f$  es diferenciable ( $C^\infty$ ) en  $p \in M$  si existen  $\varphi \in \mathcal{A}(M)$  con  $p \in \text{Dom}(\varphi)$  y  $\psi \in \mathcal{A}(N)$  con  $f(p) \in \text{Dom}(\psi)$  tal, que  $\psi f \varphi^{-1} \in \mathcal{C}_{\varphi(p)}^\infty(m; n)$ , es decir,

$$\psi f \varphi^{-1} : U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$$

es diferenciable, con  $\varphi(p) \in U$  y  $U \subseteq \mathbb{R}^m$  abierto.

Esto queda ilustrado en el diagrama conmutativo siguiente:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \psi \\ U \subseteq \mathbb{R}^m & \xrightarrow{\psi f \varphi^{-1}} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

**Proposición 1.4.** Si  $f$  es diferenciable en  $p$ , entonces para toda  $\varphi \in \mathcal{A}(M)$  con  $p \in \text{Dom}(\varphi)$  y para toda  $\psi \in \mathcal{A}(N)$  con  $f(p) \in \text{Dom}(\psi)$ ,  $\psi f \varphi^{-1} \in \mathcal{C}_{\varphi(p)}^\infty(m; n)$

#### Prueba

Supongamos que  $f$  es diferenciable en  $p$ . Entonces existen  $\tilde{\varphi} \in \mathcal{A}(M)$  y  $\tilde{\psi} \in \mathcal{A}(N)$  con  $f(p) \in \text{Dom}(\tilde{\psi})$  tal que  $\tilde{\psi} f \tilde{\varphi}^{-1} \in \mathcal{C}_{\tilde{\varphi}(p)}^\infty(p)$ . Esto se ilustra en

el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{f} & N \\
 \varphi \downarrow & & \downarrow \tilde{\psi} \\
 \mathbb{R}^m & \xrightarrow{\tilde{\psi} f \tilde{\varphi}^{-1}} & \mathbb{R}^n
 \end{array}$$

sean  $\varphi \in \mathcal{A}(M)$  y  $\psi \in \mathcal{A}(N)$  que satisfagan las condiciones de la proposición

1.4 y consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc}
 & M & \xrightarrow{f} & N & \\
 & \downarrow \tilde{\varphi} & & \downarrow \tilde{\psi} & \\
 \varphi \swarrow & \mathbb{R}^m & \xrightarrow{\tilde{\psi} f \tilde{\varphi}} & \mathbb{R}^n & \searrow \psi \\
 \tilde{\varphi} \varphi^{-1} \nearrow & \mathbb{R}^m & \xrightarrow{\psi f \varphi^{-1}} & \mathbb{R}^n & \nwarrow \tilde{\psi} \psi^{-1}
 \end{array}$$

entonces  $\psi f \varphi^{-1} = (\psi \tilde{\psi}^{-1})(\tilde{\psi} f \tilde{\varphi})(\tilde{\varphi} \varphi^{-1})$  pertenece a  $\mathcal{C}_{\varphi(p)}^{\infty}(m; n)$  por ser compuesta de aplicaciones diferenciables.

### Observación

Lo que la proposición demuestra es que en la definición 1.9 se puede sustituir **existe** por **para todo**.

**Definición 1.10 (Morfismo).** *En las condiciones de la definición 1.9, diremos que  $f$  es un morfismo de  $M$  en  $N$  si  $f$  es diferenciable ( $C^{\infty}$ ) en todo punto  $p \in M$ .*

**Notacion 1.5.**  $C^\infty(M, N) = \{f : M \longrightarrow N : f \text{ es morfismo}\}$

**Teorema 1.2.** *En las condiciones de la definición 1.9,  $f$  es un morfismo si y sólo si dada  $\varphi \in \mathcal{A}(M)$ ,  $\psi \in \mathcal{A}(N)$  y existe  $\psi f \varphi^{-1}$  entonces  $\psi f \varphi^{-1} \in \mathcal{C}_{loc}^\infty(m; n)$*

**Prueba. Condición Necesaria.** Supongamos que  $f$  es morfismo. Sea  $t \in \mathbb{R}^m$  y  $p = \varphi^{-1}(t)$ . Consideremos la función

$$\psi f \varphi^{-1}|_{\varphi(Dom(\varphi))} : \varphi(Dom(\varphi)) \longrightarrow \psi(Dom(\psi))$$

como  $\varphi \in \mathcal{A}(M)$  y  $\psi \in \mathcal{A}(N)$ ,  $\varphi(Dom(\varphi))$  y  $\psi(Dom(\psi))$  son abiertos en  $\mathbb{R}^m$  y  $\mathbb{R}^n$ , respectivamente.

Sea  $q \in \varphi(Dom(\varphi))$  entonces  $q = \varphi(s)$ ,  $s \in Dom(\varphi)$  como  $f$  es morfismo,  $f$  es diferenciable ( $C^\infty$ ) en  $s$ , lo que significa que  $\psi f \varphi^{-1}|_{\varphi(Dom(\varphi))}$  es diferenciable en  $q$  luego lo es también en el abierto  $\varphi(Dom(\varphi))$  pues  $q$  era arbitrario en  $\varphi(Dom(\varphi))$ .

**Condición suficiente.** Supongamos  $\psi f \varphi^{-1} \in \mathcal{C}_{loc}^\infty(m; n)$ , es decir,  $\forall t \in \mathbb{R}^m, \exists U, V$  abiertos en  $\mathbb{R}^m$  y  $\mathbb{R}^n$  respectivamente, con  $t \in U$  y  $\psi f \varphi^{-1}(t) \in V$  tal que  $\psi f \varphi^{-1} : U \longrightarrow V$  es  $C^\infty$ .

Tomemos  $p \in M$ ,  $\varphi \in \mathcal{A}(M)$  con  $p \in Dom(\varphi)$  entonces  $\varphi(p) \in \varphi(Dom(\varphi))$ .

Sea  $U$  vecindad de  $\varphi(p)$  en  $\mathbb{R}^m$  y consideremos  $\varphi(Dom(\varphi)) \cap U$ .

Análogamente, consideremos  $\psi(f(p))$  y  $V$  vecindad de  $\psi(f(p))$  en  $\mathbb{R}^n$  y  $\psi(Dom(\psi)) \cap V$ . Como  $\psi f \varphi^{-1} : U \longrightarrow V$  es  $C^\infty$ , entonces,

$\psi f \varphi^{-1} : \varphi(Dom(\varphi)) \cap U \longrightarrow \psi(Dom(\psi)) \cap V$  es  $C^\infty$  entre abiertos de  $\mathbb{R}^m$  y  $\mathbb{R}^n$  respectivamente. Luego  $f$  es diferenciable en  $p \in M$ , como  $p$  era un punto arbitrario, se tiene que  $f$  es morfismo de  $M$  en  $N$ .

### Observaciones

1. A modo de ejemplo de morfismo, daremos la siguiente definición:

**Definición 1.11.** *Dos atlas  $\mathcal{A}_1$  y  $\mathcal{A}_2$  sobre  $M$  son equivalentes si la aplicación identidad  $\mathbf{1}_M$  es doblemente un morfismo.*

Lo que esta definición significa es lo siguiente: Dado un conjunto  $M$ , un pseudogruppo  $\mathfrak{S} \subseteq \mathcal{D}_{loc}^\infty(m)$  y  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$  dos  $\mathfrak{S}$ -atlas sobre  $M$ , decir que  $\mathcal{A}_1$  y  $\mathcal{A}_2$  son equivalentes significa que los siguientes diagramas son conmutativos

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\mathbf{1}_M} & M \\ \varphi_1 \downarrow & & \downarrow \varphi_2 \\ \mathbb{R}^m & \xrightarrow{\varphi_2 \varphi_1^{-1}} & \mathbb{R}^m \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\mathbf{1}_M} & M \\ \varphi_2 \downarrow & & \downarrow \varphi_1 \\ \mathbb{R}^m & \xrightarrow{\varphi_1 \varphi_2^{-1}} & \mathbb{R}^m \end{array}$$

es decir  $\varphi_2 \varphi_1^{-1}, \varphi_1 \varphi_2^{-1} \in \mathfrak{S} \quad \forall \varphi_1 \in \mathcal{A}_1 \text{ y } \varphi_2 \in \mathcal{A}_2$

2. Dada una  $m$ -variedad  $M$  y  $p \in M$ .

$$\mathcal{C}_p^\infty(M, 1) = \{f : M \longrightarrow \mathbb{R} : \exists U \subseteq M, \text{abierto}, p \in U \text{ y } f|_U : U \longrightarrow \mathbb{R} \text{ es morfismo}\}$$

$$\mathcal{C}_{loc}^\infty(M, 1) = \{f : M \longrightarrow \mathbb{R} : \forall p \in M, \exists U \subseteq M, \text{abierto}, p \in U \text{ y } f|_U : U \longrightarrow \mathbb{R} \text{ es morfismo}\}$$

$$\mathcal{C}^\infty(M, 1) = \{f : M \longrightarrow \mathbb{R} : f \text{ es morfismo}\}$$

resultan casos particulares con  $N = \mathbb{R}$

3. Si  $M = A \subseteq \mathbb{R}^m$  y  $N = B \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $A, B$  abiertos, son también ejemplos de morfismos los elementos de  $\mathcal{C}^\infty(A, B)$ , en particular se tiene  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ .

4.  $\mathcal{A}(M) \subseteq \mathcal{C}_{loc}^\infty(M, m)$ , esto se desprende del siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R}^m \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \mathbf{1}_{\mathbb{R}^m} \\ \mathbb{R}^m & \xrightarrow{\mathbf{1}_{\mathbb{R}^m}} & \mathbb{R}^m \end{array}$$

En particular,  $\mathcal{A}(TM) \subseteq \mathcal{C}_{loc}^\infty(TM, m^2)$

5. La siguiente definición relaciona el concepto de morfismo con un nuevo concepto, el de subvariedad.

**Definición 1.12.** Sea  $M$  una  $m$ -variedad y  $S \subseteq M$  una  $k$ -variedad con  $1 \leq k \leq m$ .  $S$  es llamada una subvariedad de  $M$  si la función inclusión

$S \hookrightarrow M$  es un morfismo.

- Las subvariedades más usadas aparecen cuando la inclusión es una inmersión o un encaje.

6. Veremos en el siguiente capítulo que los campos vectoriales son ciertos morfismos  $X : M \longrightarrow TM$ ; precisamente los morfismos que hacen conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{X} & TM \\
 & \searrow \scriptstyle \mathbf{1}_M & \downarrow \scriptstyle \rho \\
 & & M
 \end{array}$$

$\rho \circ X = \mathbf{1}_M.$

Para nuestros fines, exigiremos además que  $X(p) \neq 0$  para todo  $p \in M$ .

### 1.4.2 Morfismo tangente

Sea  $M$  una  $m$ -variedad y  $N$  una  $n$ -variedad.

Dados un morfismo  $f : M \longrightarrow N$ ,  $\varphi \in \mathcal{A}(M)$ ,  $\psi \in \mathcal{A}(N)$  tales que  $p \in \text{Dom}(\varphi)$  y  $f(p) \in \text{Dom}(\psi)$ , veamos que la aplicación

$$\begin{array}{ccc}
 Tf : TM & \longrightarrow & TN \\
 \langle p, \varphi, v \rangle & \longmapsto & \langle q, \psi, w \rangle
 \end{array}$$

definida por  $Tf(\langle p, \varphi, v \rangle) = \langle f(p), \psi, (\psi f \varphi^{-1})'(\varphi(p))[v] \rangle$  es un morfismo

Verifiquemos primero que esta definición no depende de las cartas  $\varphi, \psi \in \mathcal{A}(M)$  y  $\mathcal{A}(N)$  respectivamente, y por lo tanto, es una buena definición. En efecto, sea

$$\langle p, \tilde{\varphi}, \tilde{v} \rangle = \langle p, \varphi, v \rangle$$

y

$$Tf(\langle p, \tilde{\varphi}, \tilde{v} \rangle) = \langle f(p), \tilde{\psi}, (\tilde{\psi} f \tilde{\varphi}^{-1})'(\tilde{\varphi}(p))[\tilde{v}] \rangle$$

Debemos verificar que

$$\langle f(p), \tilde{\psi}, (\tilde{\psi} f \tilde{\varphi}^{-1})'(\tilde{\varphi}(p))[v] \rangle = \langle f(p), \psi, (\psi f \varphi^{-1})'(\varphi(p))[v] \rangle$$

o equivalentemente que

$$(\psi f \varphi^{-1})'(\varphi(p))[v] = (\psi \tilde{\psi}^{-1})'(\psi(f(p)))[(\tilde{\psi} f \tilde{\varphi}^{-1})'(\tilde{\varphi}(p))[\tilde{v}]]$$

En efecto,

$$\begin{aligned} (\psi \tilde{\psi}^{-1})'(\psi(f(p)))[(\tilde{\psi} f \tilde{\varphi}^{-1})'(\tilde{\varphi}(p))[\tilde{v}]] &= (\psi \tilde{\psi}^{-1} \circ \tilde{\psi} f \tilde{\varphi}^{-1})'(\tilde{\varphi}(p), \tilde{v}) \\ &= (\psi f \tilde{\varphi}^{-1})'(\tilde{\varphi}(p))[v] \\ &= (\psi f \varphi^{-1} \varphi \tilde{\varphi}^{-1})'(\tilde{\varphi}(p))[v] \\ &= (\psi f \varphi^{-1})'(\varphi(p))[v] \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\langle p, \tilde{\varphi}, \tilde{v} \rangle = \langle p, \varphi, v \rangle$$

implica

$$Tf(\langle p, \tilde{\varphi}, \tilde{v} \rangle) = Tf(\langle p, \varphi, v \rangle)$$

**Teorema 1.3.** *En las condiciones de la definición 1.13,  $Tf$  es un morfismo de variedades, de la variedad  $TM$  en la variedad  $TN$ .*

**Prueba** Del teorema 1.2 debemos demostrar que en el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{Tf} & TN \\ \downarrow T\varphi & & \downarrow T\psi \\ \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m & \xrightarrow{T\psi Tf(T\varphi)^{-1}} & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \end{array}$$

$T\psi Tf(T\varphi)^{-1}$  es  $C_{loc}^\infty(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ .

En efecto, suponiendo que  $\psi f \varphi^{-1}$  existe y considerando  $(\varphi(p), v) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$  resulta

$$\begin{aligned} T\psi Tf(T\varphi)^{-1}(\varphi(p), v) &= T\psi Tf(\langle p, \varphi, v \rangle) \\ &= T\psi(\langle f(p), \psi, (\psi f \varphi^{-1})'(\varphi(p))[v] \rangle) \\ &= (\psi f(p), (\psi f \varphi^{-1})'(\varphi(p))[v]) \\ &= (\psi f \varphi^{-1}(\varphi(p)), (\psi f \varphi^{-1})'(\varphi(p))[v]) \end{aligned}$$

lo que demuestra lo requerido.

**Definición 1.13 (Morfismo tangente).** *Dadas  $M$  una  $m$ -variedad,  $N$  una  $n$ -variedad y un morfismo  $f : M \longrightarrow N$ , el par  $(Tf, f)$  será llamado mor-*



fismo tangente de  $f$ , del fibrado tangente  $(TM, \rho_M)$  en el fibrado tangente  $(TN, \rho_N)$  y será representado por el diagrama conmutativo siguiente:

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{Tf} & TN \\ \rho_M \downarrow & & \downarrow \rho_N \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

**Notacion 1.6.** En el contexto de la definición de morfismo entre fibrados tangentes usaremos  $T_p f$  para indicar  $Tf|_{T_p M}$ .

**Proposición 1.5.**

$$T_p f : T_p(M) \xrightarrow{\quad} T_{f(p)}(M) \\ \langle p, \varphi, v \rangle \longmapsto \langle f(p), \psi, \psi f \varphi^{-1} \rangle'(\varphi(p))[v] \rangle$$

es una aplicación lineal.

**Prueba**

Con ayuda de las proposiciones (1.1) y (1.2) definimos

$$\langle p, \varphi, v \rangle + \langle p, \varphi, w \rangle = \langle p, \varphi, v + w \rangle$$

y

$$\lambda \langle p, \varphi, v \rangle = \langle p, \varphi, \lambda v \rangle$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
T_p f(\langle p, \varphi, v \rangle + \langle p, \varphi, w \rangle) &= T_p f(\langle p, \varphi, v + w \rangle) \\
&= \langle f(p), \psi, (\psi f \varphi^{-1})'(\varphi(p))[v + w] \rangle \\
&= \langle f(p), \psi, (\psi f \varphi^{-1})'(\varphi(p))[v] \rangle + \langle f(p), \psi, (\psi f \varphi^{-1})'(\varphi(p))[w] \rangle \\
&= T_p f(\langle p, \varphi, v \rangle) + T_p f(\langle p, \varphi, w \rangle)
\end{aligned}$$

y también

$$\begin{aligned}
T_p f(\lambda \langle p, \varphi, v \rangle) &= T_p f(\langle p, \varphi, \lambda v \rangle) \\
&= \langle f(p), \psi, (\psi f \varphi^{-1})'(\varphi(p))[\lambda v] \rangle \\
&= \langle f(p), \psi, \lambda (\psi f \varphi^{-1})'(\varphi(p))[v] \rangle \\
&= \lambda \langle f(p), \psi, (\psi f \varphi^{-1})'(\varphi(p))[v] \rangle \\
&= \lambda T_p f(\langle p, \varphi, v \rangle)
\end{aligned}$$

Así,  $T_p f$  es una aplicación lineal.

### Observaciones

1. Considerando  $M = \mathbb{R}^m$  y  $N = \mathbb{R}^n$  se tiene que  $T_p f : T_p \mathbb{R}^m \longrightarrow T_{f(p)} \mathbb{R}^n$  generaliza la aplicación

$$\begin{array}{ccc} T_p \mathbb{R}^m & \longrightarrow & T_{f(p)} \mathbb{R}^n \\ (p, v) & \longmapsto & (f(p), f'(p)[v]) \end{array}$$

donde  $\varphi$ ,  $\psi$  son  $\mathbf{1}_{\mathbb{R}^m}$  y  $\mathbf{1}_{\mathbb{R}^n}$  respectivamente y  $\langle p, \mathbf{1}_{\mathbb{R}^m}, v \rangle$  se identifica con  $(p, v)$  y  $\langle f(p), \mathbf{1}_{\mathbb{R}^n}, \mathbf{1}_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{1}_{\mathbb{R}^m})^{-1}(\varphi(p), v) \rangle$  se identifica con  $(f(p), f'(p)[v])$ .

2. En el caso  $M$  abierto de  $\mathbb{R}^m$ ,  $N$  abierto de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{A}(M) = \{\mathbf{1}_{\mathbb{R}^m} | M\}$ ,  $\mathcal{A}(N) = \{\mathbf{1}_{\mathbb{R}^n} | N\}$  y  $f : M \longrightarrow N$  de clase  $\mathcal{C}^\infty$  se tiene el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \mathbf{1}_{\mathbb{R}^m} \downarrow & & \downarrow \mathbf{1}_{\mathbb{R}^n} \\ \mathbb{R}^m & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

Considerando el diagrama conmutativo asociado a  $Tf$

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{Tf} & TN \\ T\mathbf{1}_{\mathbb{R}^m} \downarrow & & \downarrow T\mathbf{1}_{\mathbb{R}^n} \\ \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m & \xrightarrow{T\mathbf{1}_{\mathbb{R}^n} Tf (T\mathbf{1}_{\mathbb{R}^m})^{-1}} & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \end{array}$$

y como

$$\begin{aligned}
T\mathbf{1}_{\mathbb{R}^n}Tf(T\mathbf{1}_{\mathbb{R}^m})^{-1}(\mathbf{1}_{\mathbb{R}^m}(p), v) &= T\mathbf{1}_{\mathbb{R}^n}Tf(\langle p, \mathbf{1}_{\mathbb{R}^m}, v \rangle) \\
&= T\mathbf{1}_{\mathbb{R}^n}(\langle f(p), \mathbf{1}_{\mathbb{R}^m}, (\mathbf{1}_{\mathbb{R}^n}f(\mathbf{1}_{\mathbb{R}^m})^{-1})'(\mathbf{1}_{\mathbb{R}^m}(p))[v] \rangle) \\
&= (f(p), (\mathbf{1}_{\mathbb{R}^n}f(\mathbf{1}_{\mathbb{R}^m})^{-1})'(\mathbf{1}_{\mathbb{R}^m}(p))[v]) \\
&= (f(p), f'(p)[v])
\end{aligned}$$

es lo mismo que

$$\begin{aligned}
Tf(\langle p, \mathbf{1}_{\mathbb{R}^m}, v \rangle) &= (T\mathbf{1}_{\mathbb{R}^n})^{-1}(f(p), f'(p)[v]) \\
&= \langle f(p), \mathbf{1}_{\mathbb{R}^n}|_N, f'(p)[v] \rangle \quad (1.3)
\end{aligned}$$

donde  $\langle p, \mathbf{1}_{\mathbb{R}^m}, v \rangle \in T_pM$  y  $\langle f(p), \mathbf{1}_{\mathbb{R}^n}|_N, f'(p)[v] \rangle \in T_{f(p)}N$ .

De esta forma,  $\langle p, \mathbf{1}_{\mathbb{R}^m}, v \rangle \in T_pM$  estará determinado por  $p$  y  $v$ .

Parafraseando lo que se tiene en (1.3) tenemos:

$$Tf((p, v)) = (f(p), f'(p)[v]), \text{ donde } (p, v) \in T_pM \text{ y } (f(p), f'(p)[v]) \in T_{f(p)}N$$

3. En el contexto de morfismo entre fibrados tangentes resulta que, dada

$\varphi \in \mathcal{A}(M)$ ,  $T\varphi$  es la correspondiente aplicación tangente de  $\varphi$ :

$$\begin{array}{ccc}
M & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R}^m \\
\varphi \downarrow & & \downarrow \mathbf{1}_{\mathbb{R}^m} \\
\mathbb{R}^m & \xrightarrow{\mathbf{1}_{\mathbb{R}^m}} & \mathbb{R}^m
\end{array}$$

Pasando al esquema del morfismo tangente  $(T\varphi, \varphi)$  se tiene

$$\begin{array}{ccc}
 TM & \xrightarrow{T\varphi} & T\mathbb{R}^m \\
 \downarrow T\varphi & & \downarrow T\mathbf{1}_{\mathbb{R}^m} \\
 \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m & \xrightarrow{T\mathbf{1}_{\mathbb{R}^m} T\varphi(T\varphi)^{-1}} & \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m
 \end{array}$$

por la observación anterior podemos identificar  $\langle \varphi(p), \mathbf{1}_{\mathbb{R}^m}, v \rangle$  con  $(\varphi(p), v)$

y es así que, en el contexto de morfismo tangente, podemos identificar

el morfismo tangente  $(T\varphi, \varphi)$  con la aplicación tangente  $T\varphi$

$$\begin{aligned}
 T\varphi(\langle p, \varphi, v \rangle) &= \langle \varphi(p), \mathbf{1}_{\mathbb{R}^m}, \mathbf{1}_{\mathbb{R}^m} \varphi \varphi^{-1}(v) \rangle \\
 &= \langle \varphi(p), \mathbf{1}_{\mathbb{R}^m}, \mathbf{1}_{\mathbb{R}^m}(v) \rangle \\
 &= \langle \varphi(p), \mathbf{1}_{\mathbb{R}^m}, v \rangle \\
 &= (\varphi(p), v)
 \end{aligned}$$

donde  $(\varphi(p), v) \in T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^m$ .

# Capítulo 2

## El teorema del flujo tubular

En este capítulo nos proponemos demostrar el teorema del flujo tubular. Para ello nos serviremos de un teorema de existencia para soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias en el caso euclidiano.

### 2.1 Un teorema de existencia de EDO

Empezaremos proponiendo, sin demostración, un teorema de existencia y unicidad de soluciones para una ecuación diferencial ordinaria.

**Teorema 2.1.** *Dado  $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\Omega$  abierto, para cada  $x_0 \in \Omega$ , existen  $\epsilon > 0, r > 0$  con  $B(x_0, 2r) \subseteq \Omega$  y un único morfismo  $f : ]-\epsilon, \epsilon[ \times B(x_0, r) \longrightarrow \Omega$  tal que para cada  $x \in B(x_0, r)$  la aplicación  $t \in ]-\epsilon, \epsilon[ \longmapsto f(t, x)$  es la única solución del P.V.I.*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}|_{t=s} f(t, x) = F(f(s, x)) \\ f(0, x) = x \end{cases}$$

Más aún, definiendo  $f_t(x) = f(t, x)$ , la familia  $\{f_t : t \in ]-\epsilon, \epsilon[ \}$  llamada *flujo* local de  $F$  en  $x_0$  es un grupo local de difeomorfismos, es decir,

1.  $f_t : B(x_0, r) \longrightarrow f_t(B(x_0, r))$  es difeomorfismo  $\forall t \in ]-\epsilon, \epsilon[$ .
2. Si  $s, t, s + t \in ]-\epsilon, \epsilon[$  y existe  $f_s \circ f_t$ , entonces  $f_s \circ f_t = f_{s+t}$ . En particular,  $\exists f_t^{-1} = f_{-t}$

**Prueba** Ver [1] páginas 186-202.

La unicidad garantiza que fijado  $x \in B(x_0, r)$ , la aplicación

$$t \in ]-\epsilon, \epsilon[ \longmapsto f(t, x) \in \mathbb{R}^m$$

es una parametrización de la llamada **curva integral** de  $F$  que pasa por  $f(0, x)$  con velocidad  $F(x)$ .

## 2.2 Campos vectoriales

**Definición 2.1.** Dada una  $m$ -variedad  $M$ , por un campo vectorial de  $M$  entenderemos un morfismo  $X : M \longrightarrow TM$  tal, que  $\rho_M \circ X = \mathbf{1}_M$ , es decir, tal, que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{X} & TM \\ & \searrow \mathbf{1}_M & \downarrow \rho_M \\ & & M \end{array}$$

**Observación** La condición  $\rho_M \circ X = \mathbf{1}_M$  es equivalente a  $p \in M \implies X(p) \in T_p M$ .

En efecto,  $\rho_M \circ X = \mathbf{1}_M \iff \rho_M(X(p)) = p \iff X(p) \in \rho_M^{-1}(\{p\}) = T_p M$ .

En nuestro caso, consideraremos únicamente campos vectoriales tales que  $X(p) \neq 0$  para todo  $p \in M$ .

### 2.2.1 Versión local de un campo vectorial

Nos proponemos asociar a cada campo vectorial  $X$  un campo vectorial clásico, para esto usaremos las cartas de la  $m$ -variedad  $M$  y las cartas de la  $2m$ -variedad  $TM$ .

Sea  $\varphi \in \mathcal{A}(M)$  y consideremos el diagrama conmutativo siguiente:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{X} & TM \\ \varphi \downarrow & & \downarrow T\varphi \\ \text{Im}(\varphi) & \xrightarrow{(\mathbf{1}, X_\varphi)} & \text{Im}(\varphi) \times \mathbb{R}^m \end{array}$$

Definimos

$$X_\varphi(\varphi(p)) = T_p \varphi[X(p)]$$

donde identificamos a  $T_p \varphi[X(p)]$  con  $\pi_2 \circ T_p \varphi[X(p)]$ .

Si escribimos  $\varphi(p) = a$ , obtenemos un campo vectorial clásico  $X_\varphi$  definido por

$$\begin{array}{ccc} X_\varphi : \text{Im}(\varphi) & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ a & \longmapsto & T_{\varphi^{-1}(a)}[X(\varphi^{-1}(a))] \end{array}$$

**Proposición 2.1.** *El campo vectorial clásico  $X_\varphi$  es un morfismo.*



## Prueba

Como el campo  $X$  es un morfismo, del diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{X} & TM \\ \varphi \downarrow & & \downarrow T\varphi \\ \text{Im}(\varphi) & \longrightarrow & \text{Im}(\varphi) \times \mathbb{R}^m \end{array}$$

se obtiene que  $T\varphi X\varphi^{-1}$  es un morfismo. Como

$$\begin{aligned} T\varphi X\varphi^{-1}(\varphi(p)) &= T\varphi(X(p)) \\ &= T_p\varphi(X(p)) \\ &= (\varphi(p), T_p\varphi(X(p))) \\ &= (\mathbf{1}, X_\varphi)(\varphi(p)) \end{aligned}$$

se tiene que  $(\mathbf{1}, X_\varphi)$  es un morfismo y así  $\pi_2 \circ (\mathbf{1}, X_\varphi) = X_\varphi$  es un morfismo.

**Definición 2.2.** *El campo vectorial clásico  $X_\varphi$  asociado al campo vectorial  $X$  será llamado  $\varphi$ -trivialización de  $X$  o  $\varphi$ -forma local de  $X$ .*

## Observaciones

1. Sean  $\varphi, \psi \in \mathcal{A}(M)$ ,  $q \in \text{Dom}(\varphi) \cap \text{Dom}(\psi) \neq \emptyset$  y  $X$  un campo vectorial.

¿Cuál es la relación entre  $X_\varphi(\varphi(q))$  y  $X_\psi(\psi(q))$ ?

Consideremos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
 M & \xrightarrow{X} & TM & & \\
 \downarrow \psi & & \downarrow T\psi & & \\
 Im(\psi) & \xrightarrow{(\mathbf{1}, X_\psi)} & Im(\psi) \times \mathbb{R}^m & & \\
 \uparrow \varphi & & \uparrow T\varphi & & \\
 Im(\varphi) & \xrightarrow{(\mathbf{1}, X_\varphi)} & Im(\varphi) \times \mathbb{R}^m & & 
 \end{array}$$

De este diagrama se obtiene

$$\begin{aligned}
 (\psi(q), X_\psi(\psi(q))) &= T\psi \circ (T\varphi)^{-1}(\varphi(q), X_\varphi(\varphi(q))) \\
 &= T\psi(\langle q, \varphi, X_\varphi(\varphi(q)) \rangle) \\
 &= T_q\psi \langle q, \varphi, X_\varphi(\varphi(q)) \rangle
 \end{aligned}$$

donde  $X_\psi(\psi(q))$  es el único vector de  $\mathbb{R}^m$  tal que

$$\langle q, \varphi, X_\varphi(\varphi(q)) \rangle = \langle q, \psi, X_\psi(\psi(q)) \rangle$$

por lo tanto

$$X_\psi(\psi(q)) = (\psi\varphi^{-1})'(\varphi(q))[X_\varphi(\varphi(q))].$$

2. Consideraremos el conjunto  $\Gamma(M)$  formado por todos los campos vectoriales de  $M$ .

**Notacion 2.1.**  $\Gamma(M) = \{X : M \longrightarrow TM : X \text{ es campo vectorial de } M\}$

Si  $C^\infty(M)$  denota el anillo de los morfismos de  $M$  en  $\mathbb{R}$ , es fácil ver que  $\Gamma(M)$  admite una estructura de  $C^\infty(M)$ -módulo con las operaciones :

- $(X + Y)(p) = X(p) + Y(p)$
- $fX(p) = f(p)X(p)$ .

donde  $p \in M$  y  $f$  en el anillo  $C^\infty(M)$ .

3. Sea  $x \in B(x_0, r)$ . Si  $f(t, x)$  está bien definido  $\forall t \in \mathbb{R}$ , el flujo  $\{f_t : t \in \mathbb{R}\}$  es un grupo llamado grupo de un parámetro de difeomorfismos locales generados por  $F$

## 2.3 El teorema del flujo tubular

Antes de demostrar el teorema del flujo tubular, daremos dos lemas y una proposición que nos servirán para reducir el teorema del flujo tubular de una vecindad arbitraria a una vecindad del origen.

**Lema 2.1.** *Dado  $H \subseteq \mathbb{R}^n$  subespacio vectorial de dimensión  $m < n$ , existe  $\Phi \in GL(n)$  tal, que  $\Phi(H) = \mathbb{R}_0^m = \mathbb{R}^m \times \{0\}^{n-m}$ .*

**Prueba** Consideremos una base  $\{u^i\}$ ,  $1 \leq i \leq m$  base de  $H$ . Extendamos esta base a una base  $\{u^j\}$ ,  $1 \leq j \leq n$  de  $\mathbb{R}^n$  y definamos

$$\Phi(u^j) = e^j, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Por lo tanto,  $\Phi \in GL(n)$  y  $\Phi(H) = \mathcal{L}\{e^1, \dots, e^m\} = \mathbb{R}_0^m$ .

Gráficamente se tiene

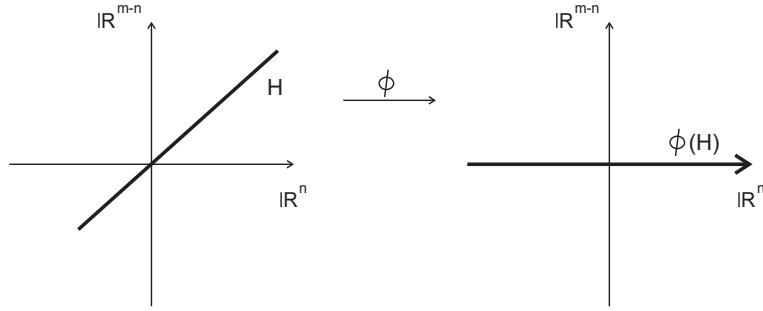


Figure 2.1: La aplicación  $\Phi$

**Lema 2.2.** Sea  $\xi \in \mathcal{D}_{loc}^\infty(n)$  y

$$\begin{array}{ccc} t_q : \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{R}^n \\ p & \longmapsto & t_q(p) = p - q \end{array}$$

Si  $p \in \text{Dom}(\xi)$  entonces  $\eta = t_{\xi(p)} \circ \xi \in \mathcal{D}_{loc}^\infty(n)$  y  $\eta(p) = 0$

**Prueba.**  $\eta(p) = t_{\xi(p)} \circ \xi(p) = t_{\xi(p)}(\xi(p)) = \xi(p) - \xi(p) = 0$ . Claramente,  $\eta \in \mathcal{D}_{loc}^\infty(n)$  por ser composición de difeomorfismos.

**Proposición 2.2.** Sea  $M$  una  $m$ -variedad,  $p \in M$  y  $v \in T_p M$ . Entonces existe  $\eta \in \mathcal{A}(M)$  tal, que  $\eta(p) = 0 \in \mathbb{R}^m$  y  $T_p \eta[v] = e^1$ , donde  $\{e^i\}$  es la base canónica de  $\mathbb{R}^m$ .

**Prueba.** Sea  $\eta = t_{\varphi(p)} \circ \varphi$  donde  $\varphi \in \mathcal{A}(M)$  y  $p \in \text{Dom}(\varphi)$ .

$\eta \in \mathcal{A}(M)$  pues es biyección y si  $\psi \in \mathcal{A}(M)$  entonces, por el lema 2.2 con  $\xi = \varphi \circ \psi^{-1}$ , se tiene  $\eta \circ \psi^{-1} = t_{\varphi(p)} \circ \varphi \circ \psi^{-1} \in \mathfrak{S}$ .

Normalizando  $T_p\eta[v]$  y rotándolo si es necesario, se tiene que  $T_p\eta[v] = e^1$ .

**Teorema 2.2 (Teorema del flujo tubular).** *Sea  $M$  una  $m$ -variedad. Si  $X : M \longrightarrow TM$  es un campo vectorial y  $p \in M$ , entonces existe  $\varphi \in \mathcal{A}(M)$  tal que*

- $p \in \text{Dom}(\varphi)$
- $\varphi(p) = 0$
- $X(q) = \langle q, \varphi, e^1 \rangle, \forall q \in \text{Dom}(\varphi)$

**Prueba.** Por el lema 2.2 podemos considerar  $\eta \in \mathcal{A}(M)$  tal, que

$p \in \text{Dom}(\eta)$ ,  $\eta(p) = 0$  y  $T_p\eta[v] = e^1$  tal como el siguiente dibujo lo ilustra

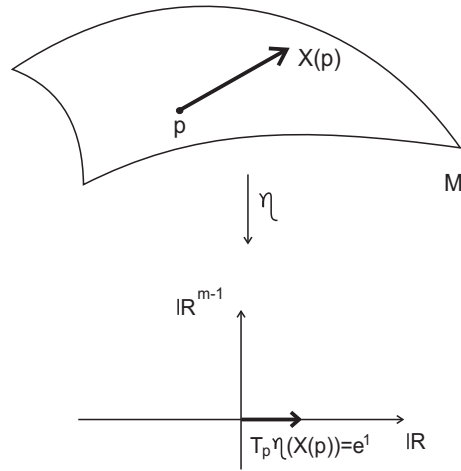


Figure 2.2: Trasladando el problema al origen

Consideremos en el siguiente diagrama conmutativo, la representación local de  $X$ , a saber  $X_\eta$

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{X} & TM \\
 \eta \downarrow & & \downarrow T\eta \\
 Im(\eta) & \xrightarrow{(1, X_\eta)} & Im(\eta) \times \mathbb{R}^m
 \end{array}$$

donde

$$X_\eta : Im(\eta) \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

definido por

$$X_\eta(\eta(q)) = T_p \eta(X(q))$$

es la  $\eta$ - forma local de  $X$ .

Por el teorema 2.1 de existencia para ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\exists \phi : ] - \epsilon, \epsilon[ \times B(0, r) \longrightarrow Im(\eta)$$

$B(0, r) \subseteq Im(\eta)$  tal que para cada  $x \in B(0, r)$  fijo, la aplicación

$$t \in ] - \epsilon, \epsilon[ \longmapsto \phi(t, x)$$

es solución del P.V.I.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}|_{t=s} \phi(t, x) = X_\eta(\phi(s, x)) \\ \phi(0, x) = x \end{cases}$$

Ahora consideremos  $\epsilon, r > 0$  tales que

$$] - \epsilon, \epsilon[ \times B^{m-1}(0, r) \subseteq Im(\eta)$$

y la aplicación

$$\psi : ] - \epsilon, \epsilon[ \times B^{m-1}(0, r) \subseteq Im(\eta) \longrightarrow Im(\eta)$$

definida por  $\psi(t, y) = \phi_t(0, y) = \phi(t; 0, y)$

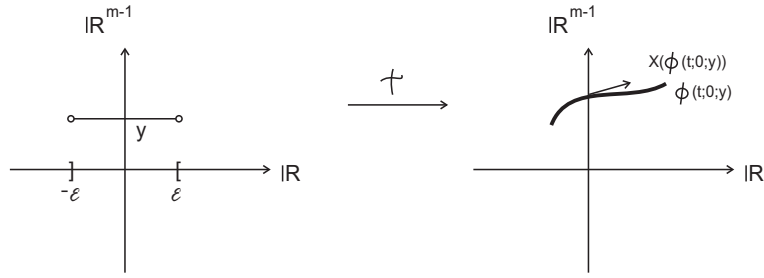


Figure 2.3: Los puntos  $(t, y), t \in ]-\epsilon, \epsilon[$  son llevados en curvas integrales

Observemos que

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \big|_{t=s} \phi(t; 0, y) = X_\eta(\phi(s; 0, y)) \\ \phi(0; 0, y) = (0, y) \end{cases}$$

es decir  $\psi$  lleva segmentos de rectas paralelos al eje  $e^1$  en curvas integrales de  $X_\eta$  pasando por  $(0, y) \in \mathbb{R}^m$ .

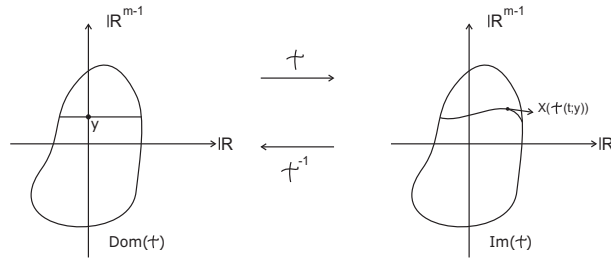


Figure 2.4: La aplicación  $\psi$



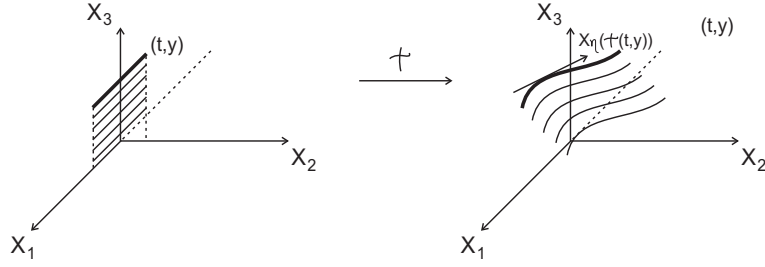


Figure 2.5: Segmentos paralelos al eje  $e^1$  son llevados en curvas integrales

Afirmamos que  $\psi$  es un difeomorfismo local en una vecindad de  $0 \in \mathbb{R}^m$ .

En efecto, verificaremos que  $\psi'(0) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}^m} \in GL(m)$  o equivalentemente que

$$\partial_i \psi(0) = e^i, \forall 1 \leq i \leq m.$$

- $i = 1$ .

$$\begin{aligned} \partial_1 \psi(0) &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \psi(se^1) = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \psi((s, 0, \dots, 0)) = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \phi_s((0, 0)) = \\ &X_\eta(\phi((0; 0, 0))) = X_\eta(0) = e^1 \end{aligned}$$

- $i < 1 \leq m$ .

$$\partial_i \psi(0) = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \psi(se^i) = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \phi_0(se^i) = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} se^i = e^i$$

Así,  $\psi'(0) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}^m}$  y  $\psi$  es un difeomorfismo local en una vecindad de  $0 \in \mathbb{R}^m$ .

Considerando el siguiente gráfico

definamos

$$\varphi = \psi^{-1} \circ \eta : \eta^{-1}(Im(\psi)) \longrightarrow Dom(\psi)$$

- $p \in Dom(\varphi)$  pues  $\psi^{-1}\eta(p)$  está definida.

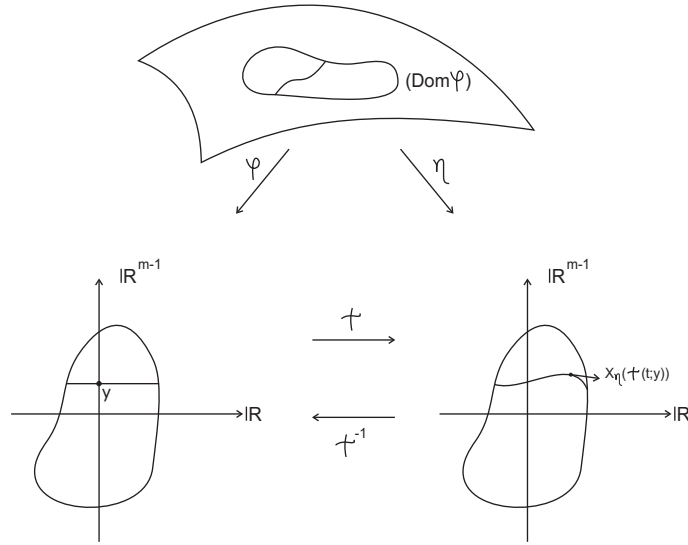


Figure 2.6: La construcción de  $\varphi$

- $\varphi(p) = \psi^{-1} \circ \eta(p) = \psi^{-1}(0) = \psi^{-1}(0; 0, \dots, 0) = \phi_0((0, \dots, 0)) = (0, \dots, 0)$
- $\varphi \in \mathcal{A}(M)$  pues  $\exists \eta \in \mathcal{A}(M)$  tal que  $\varphi\eta^{-1} = \psi^{-1}$  es un difeomorfismo local. Luego,  $\forall \tilde{\eta} \in \mathcal{A}(M)$ ,  $\varphi\tilde{\eta}^{-1}$  es un difeomorfismo local, siempre que  $\text{Dom}(\varphi) \cap \text{Dom}(\eta) \neq \emptyset$ .
- $X\varphi(\varphi(q)) = e^1, \forall q \in \text{Dom}(\varphi)$ .

En efecto, como  $q \in \text{Dom}(\eta) \cap \text{Dom}(\varphi)$ ,  $\eta \circ \varphi \in \mathcal{A}(M)$  y observando el

siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc}
 M & \xrightarrow{X} & TM & & \\
 \downarrow \psi & & \downarrow T\psi & & \\
 Im(\psi) & \xrightarrow{(\mathbf{1}, X_\psi)} & Im(\psi) \times \mathbb{R}^m & & \\
 \uparrow \varphi & & \downarrow T\varphi & & \\
 Im(\varphi) & \xrightarrow{(\mathbf{1}, X_\varphi)} & Im(\varphi) \times \mathbb{R}^m & & 
 \end{array}$$

se tiene que la relación entre  $X\varphi(\varphi(q))$  y  $X\eta(\eta(q))$  está dada por

$$\langle q, \varphi, X\varphi(\varphi(q)) \rangle = \langle q, \eta, X\eta(\eta(q)) \rangle$$

si y sólo si

$$X_\varphi(\varphi(q)) = (\varphi\eta^{-1})'(\eta(q))[X_\eta(\eta(q))].$$

Pero, del gráfico 2.6

$$- \eta(q) = \psi(t, y) = \phi_t(0, y) = \phi(t; 0, y)$$

Así,

$$\begin{aligned}
X_\varphi(\varphi(q)) &= (\varphi\eta^{-1})'(\eta(q))[X_\eta(\eta(q))] \\
&= (\varphi\eta^{-1})'(\psi(t, y))(X_\eta(\psi(t, y))) \\
&= (\varphi\eta^{-1})'(\psi(t, y))\left[\frac{d}{dt}\psi(t, y)[1]\right] \\
&= (\varphi\eta^{-1})'(\psi(t, y))[\psi'(t, y)[e^1]] \\
&= (\psi^{-1})'(\psi(t, y))[\psi'(t, y)[e^1]] \\
&= (\psi^{-1}\psi)'(\psi(t, y))[e^1] \\
&= (Id)'(\psi(t, y))[e^1] \\
&= Id(e^1) \\
&= e^1
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$X_\varphi(\varphi(q)) = e^1$$

luego,

$$X(q) = \langle q, \varphi, e^1 \rangle, \forall q \in Dom(\varphi)$$

y esto finaliza la prueba del teorema del flujo tubular.

El contenido geométrico del teorema del flujo tubular se ilustra en el siguiente gráfico:

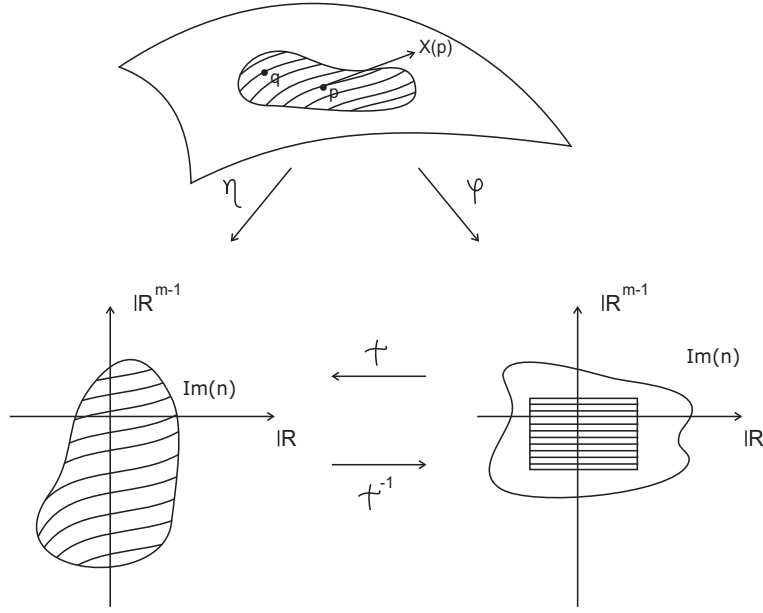


Figure 2.7: El teorema del flujo tubular

**Corolario 2.1.** *En las condiciones del teorema del flujo tubular, existe un sub atlas  $\mathcal{A}_1(M) \subseteq \mathcal{A}(M)$  tal que*

1. *Si  $\varphi \in \mathcal{A}_1(M)$  entonces  $Im(\varphi) = I \times B$  donde  $I \subseteq \mathbb{R}$  intervalo abierto,  $0 \in I$ ;  $B = B(0, \tilde{r}) \subseteq \mathbb{R}^{m-1}$ .*
2. *Sean  $\varphi, \tilde{\varphi} \in \mathcal{A}_1(M)$ ,  $U = Dom(\varphi), V = Dom(\psi)$  tales que  $U \cap V \neq \emptyset$  entonces el cambio de coordenadas  $\tilde{\varphi}\varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \longrightarrow \tilde{\varphi}(U \cap V)$  es de la forma  $\tilde{\varphi}\varphi^{-1}(t, x) = (h_1(t, x), h_2(x))$  es decir,  $\tilde{\varphi}\varphi^{-1}$  lleva segmentos de recta paralelos al eje  $e^1$  contenidos en  $\varphi(U \cap V)$  en segmentos de recta paralelos al eje  $e^1$  contenidos en  $\tilde{\varphi}(U \cap V)$ .*

### Prueba

Por el teorema del flujo tubular a cada  $p \in M$ , está asociada una carta  $\varphi \in$

$\mathcal{A}(M)$ . Definamos  $\mathcal{A}_1(M) = \{\varphi \in \mathcal{A}(M) : \varphi \text{ es dada por el teorema del flujo tubular}\}$ .

Entonces,  $\bigcup_{p \in M} \text{Dom}(\varphi) = M$  pues  $p \in \text{Dom}(\varphi)$ .

$$1. \varphi(\text{Dom}(\varphi)) = \text{Dom}(\psi) = ] - \epsilon, \epsilon[ \times B^{m-1}(0, r)$$

2. Supongamos  $\varphi, \tilde{\varphi} \in \mathcal{A}_1(M)$  tal que  $U \cap V \neq \emptyset$

Afirmamos que

$$\tilde{\varphi}\varphi^{-1}(\varphi(U \cap V) \cap (\{t\} \times \mathbb{R}^{m-1})) = \tilde{\varphi}(U \cap V) \cap \{\tilde{t}\} \times \mathbb{R}^{m-1}$$

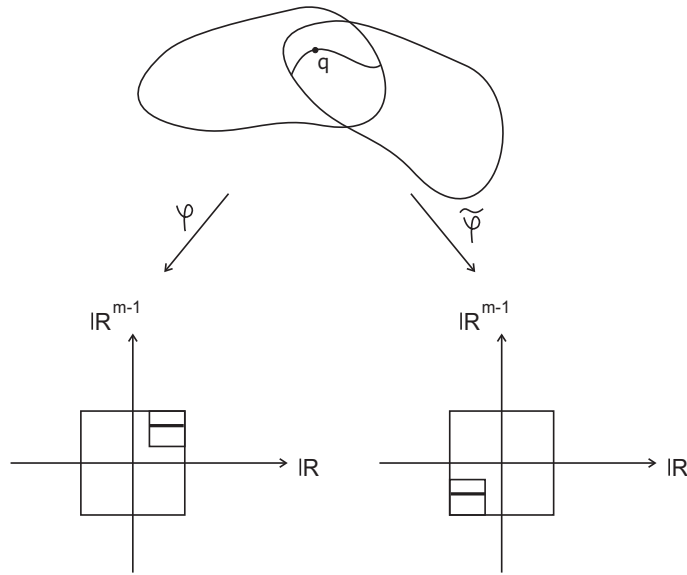


Figure 2.8: El cambio de coordenadas en  $\mathcal{A}_1(M)$

es decir,  $\tilde{\varphi}\varphi^{-1}$  lleva segmentos de recta paralelos al eje  $e^1$  contenidos en  $\varphi(U \cap V)$  en segmentos de recta paralelos al eje  $e^1$  contenidos en

$$\tilde{\varphi}(U \cap V).$$

En efecto, sea  $(t, y) \in \varphi(U \cap V) \cap (\{t\} \times \mathbb{R}^{m-1})$  entonces

$$\tilde{\varphi}\varphi^{-1}(t, y) = \tilde{\varphi}(q) \in \text{Im}(\tilde{\varphi}) = \tilde{\varphi}(V) \cap \{t\} \times \mathbb{R}^{m-1}.$$

Así,  $\tilde{\varphi}(q) \in \tilde{\varphi}(U \cap V) \cap (\{t\} \times \mathbb{R}^{m-1})$ .

Sea  $(t, x) \in \varphi(U \cap V)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $x \in \mathbb{R}^{m-1}$ . Como

$$\tilde{\varphi}\varphi^{-1}(t, y) = (h_1(t, x), \tilde{h}_2(t, x)) = (h_1(t, x), x_0)$$

y

$$x_0 = \tilde{h}_2(t_1, x) = \tilde{h}_2(t_2, x)$$

vemos que  $\tilde{h}_2(t, x)$  sólo depende de la segunda componente, es decir,

$$\tilde{h}_2(t, x) = h_2(x).$$

**Definición 2.3.** *El sub-atlas  $\mathcal{A}_1(M)$  es llamado  $X$ -atlas 1-foliante de la variedad  $M$*

En este contexto podemos expresar el corolario 2.1 diciendo que las cartas dadas por el teorema del flujo tubular determinan una 1-foliación local de la variedad  $M$ .

## 2.4 Curvas integrales sobre una variedad

Sea

$$\rho : ] - \epsilon, \epsilon[ \longrightarrow M$$

una curva de clase  $C^\infty$

¿Qué entendemos por  $\frac{d\rho}{dt}\big|_{t=s}$ ?

Consideremos el morfismo tangente  $(T\rho, \rho)$  representado en el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} T] - \epsilon, \epsilon[ & \xrightarrow{T\rho} & TM \\ \pi_{]-\epsilon, \epsilon[} \downarrow & & \downarrow \pi_M \\ ] - \epsilon, \epsilon[ & \xrightarrow{\rho} & M \end{array}$$

por lo tanto,

$$T\rho\langle s, \mathbf{1}_{]-\epsilon, \epsilon[}, v \rangle = \langle \rho(s), \psi, (\psi\rho)'(s)[v] \rangle$$

donde  $\psi \in \mathcal{A}(M)$ ,  $\rho(s) \in \text{Dom}(\psi)$  y  $\psi$  es cualquiera.

Si  $v = 1$ , definimos  $\frac{d\rho}{dt}\big|_{t=s} := T\rho\langle s, \mathbf{1}_{]-\epsilon, \epsilon[}, 1 \rangle$

En este caso  $\frac{d\rho}{dt}\big|_{t=s} = \langle \rho(s), \psi, (\psi\rho)'(s)[1] \rangle := \langle \rho(s), \psi, (\psi\rho)'(s) \rangle$



### 2.4.1 Existencia de curvas integrales en M

Veamos ahora que existe una curva integral para el campo  $X$  que pasa por el punto  $p \in M$ , es decir, existe un morfismo

$$\begin{array}{ccc} c : ] - \epsilon, \epsilon[ & \longrightarrow & M \\ t & \longmapsto & c(t) \end{array}$$

tal que  $\frac{dc}{dt}\big|_{t=s} = X(c(s))$  y  $c(t_0) = p$ .

**Proposición 2.3.** *Sea  $\varphi \in \mathcal{A}_1$  (i.e.  $\varphi$  dada por el TFT como en el corolario 2.1),  $q \in \text{Dom}(\varphi)$ . Existe una curva integral para el campo  $X$  que pasa por el punto  $q$ .*

#### Prueba

Sea  $\varphi(q) = (t_0, y_0) \in I \times B, t_0 \in \mathbb{R}, y_0 \in \mathbb{R}^{m-1}$ .

$\varphi^{-1}(I \times \{y_0\})$  es imagen de una curva integral pasando por  $q \in M$ . En efecto, considerando el gráfico obtenido en el TFT

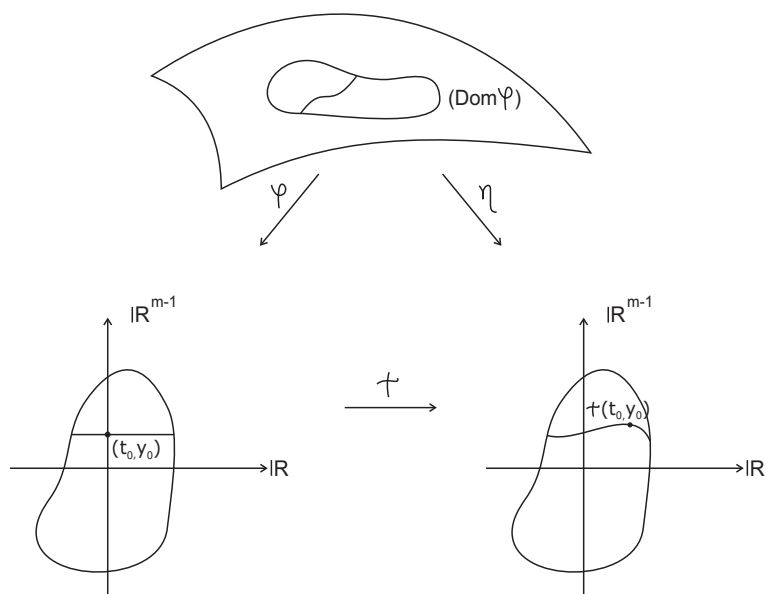


Figure 2.9: Definición de la curva integral  $c$

definimos la curva

$$\begin{aligned} c : I = ] - \epsilon, \epsilon[ &\longrightarrow M \\ t &\longmapsto c(t) \end{aligned}$$

por

$$c(t) = \varphi^{-1}(t, y_0) = \eta^{-1}\psi(t, y_0)$$

entonces

$$\begin{aligned}
\frac{dc}{dt}\bigg|_{t=s} &= \frac{d\eta^{-1}\psi}{dt}\bigg|_{t=s} \\
&= T\eta^{-1}\psi\langle s, \mathbf{1}_{]-\epsilon, \epsilon[}, 1\rangle \\
&= \langle \eta^{-1}\psi(s), \eta, (\eta\eta^{-1}\psi)'(s)[1]\rangle \\
&= \langle \varphi^{-1}(s), \eta, \psi'(s)[1]\rangle \\
&= \langle \varphi^{-1}(s, y_0), \eta, \psi'(s, y_0)[1]\rangle \\
&= \langle \varphi^{-1}(s, y_0), \eta, X_\eta(\psi'(s, y_0))\rangle \\
&= X(\eta^{-1}(\psi(s, y_0))) \\
&= X(\eta^{-1}\psi(s, y_0)) \\
&= X(c(s))
\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{cases} \frac{dc}{dt}\bigg|_{t=s} &= X(c(s)) \\ c(t_0) &= q \end{cases}$$

De esta forma  $c(I) = \varphi^{-1}(I \times \{y_0\})$  es imagen de la curva integral  $c$ .

**Lema 2.3.** *En las condiciones de la proposición anterior, sean  $\alpha = \varphi^{-1}(I \times \{y\})$  y  $\beta = \varphi^{-1}(I \times \{z\})$ ,  $y, z \in B \subseteq \mathbb{R}^{m-1}$ . Entonces  $\alpha \cap \beta = \emptyset$  o  $\alpha = \beta$*

### Prueba

Supongamos  $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$ . Entonces  $\exists w$  tal que  $w = \varphi^{-1}(t_0, y) = \varphi^{-1}(t_1, z)$ .

Como  $\varphi$  es una biyección  $(t_0, y) = (t_1, z)$ .

Así,  $\varphi^{-1}(I \times \{y\}) = \varphi^{-1}(I \times \{z\})$ .

La conclusión de esto es que si dos curvas integrales definidas en  $I$  se intersecan, son iguales.

### 2.4.2 Curvas integrales y conexidad

**Definición 2.4 (Inmersión).** Sean  $M$  y  $N$  variedades  $m$  y  $n$  dimensionales respectivamente. Una función

$$f : M \longrightarrow N$$

es llamada una *inmersión* si  $Tf|_{T_p M}$  tiene rango  $m$  para todo  $p \in M$ .

**Definición 2.5.** Un subconjunto  $M_1 \subseteq M$  es llamado *subvariedad inmersa* de  $M$  si la inclusión

$$i : M_1 \longrightarrow M$$

es una *inmersión*.

En las condiciones de la proposición 2.3 consideremos

$$f = \varphi^{-1}|_{I \times \{c\}} : I \times \{c\} \longrightarrow \text{Dom}(\varphi) \text{ donde } \varphi \in \mathcal{A}_1 \text{ y } c \in \mathbb{R}^{m-1}.$$

**Proposición 2.4.**  *$f$  es una inmersión y un homeomorfismo sobre su imagen.*

### Prueba

Probemos que  $f$  es inmersión. Sea  $(t, c) \in I \times \{c\}$ .

$$\begin{aligned} T_{(t,c)}\varphi : T_{(t,c)}I \times \{c\} &\longrightarrow T_{f((t,c))}Dom\varphi \\ \langle (t, c), \mathbf{1}, (u, c) \rangle &\longmapsto \langle f((t, c)), \varphi, (\varphi f)'(t, c)[(u, c)] \rangle \end{aligned}$$

es inyectiva. Supongamos que

$$\langle f((\tilde{t}, c)), \varphi, (\varphi f)'(\tilde{t}, c)[(\tilde{u}, c)] \rangle = \langle f((t, c)), \varphi, (\varphi f)'(t, c)[(u, c)] \rangle$$

entonces

$$\begin{aligned} (\varphi f)'(t, c)[(u, c)] &= (\varphi\varphi^{-1})'(\varphi(f(\tilde{t}, c)))[(\varphi f)'(\tilde{t}, c)[(\tilde{u}, c)]] \\ &= (\varphi f)'(\tilde{t}, c)[(\tilde{u}, c)] \end{aligned}$$

Como  $(\varphi f)'(\tilde{t}, c) = Id$  se tiene  $(u, c) = (\tilde{t}, c)$ . Como  $f = \varphi^{-1}|_{I \times \{c\}}$ ,  $f(\tilde{t}, c) = f(t, c)$  implica que  $(\tilde{t}, c) = (t, c)$

Luego,  $\langle (t, c), \mathbf{1}, (u, c) \rangle = \langle (\tilde{t}, c), \mathbf{1}, (\tilde{u}, c) \rangle$ . Como  $f = \varphi^{-1}|_{I \times \{c\}}$  y  $\varphi \in \mathcal{A}_1$  se tiene que  $f$  es homeomorfismo sobre  $f(I \times \{c\})$ .

Lo que la proposición anterior nos dice es que  $f$  es un encaje, en el siguiente sentido:

**Definición 2.6.** Sean  $M$  y  $N$  variedades de dimensión  $m$  y  $n$  respectivamente.

Una inmersión  $f : M \longrightarrow N$  es llamada un encaje si  $f : M \longrightarrow f(M) \subseteq N$

es un homeomorfismo cuando se considera  $f(M)$  con la topología inducida por la topología de  $N$ .

**Proposición 2.5.** Sean  $M$  y  $N$  variedades y  $f : M \longrightarrow N$  un encaje, entonces  $f(M)$  es una subvariedad de  $N$  de dimensión  $\dim M$

**Prueba** Ver [2] pág.14.

De acuerdo a esta proposición, los conjuntos  $\varphi^{-1}(I \times \{c\})$ ,  $c \in B \subseteq \mathbb{R}^{m-1}$  son subvariedades de dimensión 1. Se observa además que son conexos porque  $I \times \{c\}$  es conexo.

**Definición 2.7.** Los conjuntos  $\varphi^{-1}(I \times \{c\})$ ,  $c \in B \subseteq \mathbb{R}^{m-1}$  son llamados  $X$ -placas del  $\text{Dom}(\varphi)$  o  $X$ -placas de  $\mathcal{A}_1(M)$

**Definición 2.8.** Un camino de placas de  $\mathcal{A}_1(M)$  es una sucesión  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  de placas de  $\mathcal{A}_1(M)$  tal que  $\alpha_j \cap \alpha_{j+1} \neq \emptyset \quad \forall 1 \leq j \leq k-1$

Como  $M$  está recubierta por las placas de  $\mathcal{A}_1(M)$ , podemos definir en  $M$  la relación :

$$p \sim q \iff \text{ existe un camino de placas } \alpha_1, \dots, \alpha_k \text{ con } p \in \alpha_1, q \in \alpha_k$$

**Proposición 2.6.** La relación  $\sim$  es de equivalencia

**Prueba**

- $p \sim p$ . En efecto, si  $p \in \text{Dom}(\varphi)$  basta tomar  $\alpha_1 = \varphi^{-1}(I \times \{c\})$  en este caso  $k = 1$

- Supongamos  $p \sim q$ , entonces existe un camino de placas  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  tal que  $p \in \alpha_1, q \in \alpha_k$ . Definamos la sucesión  $\beta_i = \alpha_{k+1-i}$  entonces  $\beta_j \cap \beta_{j+1} \neq \emptyset \quad \forall 1 \leq j \leq k-1$  y  $p \in \beta_1, q \in \beta_k$ .
- Supongamos  $p \sim q$  y  $q \sim w$ , entonces existe un camino de placas  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  tal que  $p \in \alpha_1, q \in \alpha_k$  y existe un camino de placas  $\beta_1, \dots, \beta_s$  tal que  $q \in \beta_1, w \in \beta_s$ . Definimos

$$\gamma(s) = \begin{cases} \alpha_1 & 1 \leq s \leq k \\ \beta_{s-k} & k < s \leq k+s \end{cases}$$

Claramente  $\gamma$  es un camino de placas con  $p \in \gamma_1$  y  $w \in \gamma_{k+s}$  de ahí que  $p \sim w$ .

**Definición 2.9.** Las clases de equivalencia de esta relación son llamadas *hojas determinadas por el atlas  $\mathcal{A}_1(M)$* . La familia de todas estas hojas es llamada *X-foliación de  $M$* .

Sea  $p \in M, p \in \text{Dom}(\varphi), \varphi(p) = (t_0, y_0)$ . Como la placa  $\varphi^{-1}(I \times \{y_0\})$  es la curva integral que pasa por  $p$  se tiene que las hojas del atlas  $\mathcal{A}_1(M)$ , cuyas cartas  $\varphi$  están dadas por el teorema del flujo tubular, es decir las clases de equivalencia  $[p]$  son las curvas integrales maximales cada una de ellas pasando por cada punto  $p \in M$ .

**Proposición 2.7.** Las hojas determinadas por  $\mathcal{A}_1(M)$  son subconjuntos conexos por caminos de  $M$  disjuntos dos a dos, i.e. las *X-curvas integrales maximales* son subconjuntos conexos por caminos.

### Prueba

Sea  $\Gamma$  una hoja de  $\mathcal{A}_1(M)$ ,  $p, q \in \Gamma$  entonces existe un camino de placas  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  tal que  $p \in \alpha_1, q \in \alpha_k$ . Como las placas son conexas por caminos y  $\alpha_j \cap \alpha_{j+1} \neq \emptyset \quad \forall 1 \leq j \leq k-1$ , se tiene que  $\alpha_1 \cup \dots \cup \alpha_k$  es conexo por caminos, como  $\alpha_1 \cup \dots \cup \alpha_k \subseteq \Gamma$  existe un camino continuo uniendo  $p$  y  $q$  contenido en  $\Gamma$ .

### 2.4.3 1-Foliaciones de una Variedad

Nos proponemos demostrar que las hojas de la  $X$ -foliación de  $M$  poseen una estructura intrínseca de 1-variedad diferenciable inducida por las cartas de  $\mathcal{A}_1(M)$ , más aun, las hojas resultarán ser 1-subvariedades inmersas en  $M$ , disjuntas dos a dos. Hasta el momento sólo sabemos que son subconjuntos conexos por caminos de  $M$  y por lo tanto subconjuntos conexos de  $M$ .

Sea  $\Gamma$  una hoja,  $\varphi \in \mathcal{A}_1(M)$ , el  $X$ -atlas 1-foliante de  $M$ ;  $p \in \text{Dom}(\varphi)$  y  $\varphi(\text{Dom}(\varphi)) = I \times B$ , donde  $I \subseteq \mathbb{R}$ ,  $B \subseteq \mathbb{R}^{m-1}$ , podemos suponer que son bolas abiertas en  $\mathbb{R}$  y  $\mathbb{R}^{m-1}$ , respectivamente. Sea  $\alpha$  una curva integral (placa) en el  $\text{Dom}(\varphi)$  que contiene a  $p$ , i.e.  $\alpha = \varphi^{-1}(I \times \{y_0\})$  donde  $\varphi(p) = (t, y_0)$ .

Sea  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$

$$\varphi_1 : I \times B \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\varphi_2 : I \times B \longrightarrow \mathbb{R}^{m-1}$$



Definimos  $\bar{\varphi} : \alpha \longrightarrow \mathbb{R}$  por  $\bar{\varphi} = \varphi_1|_{\alpha}$

- $\bar{\varphi} : \alpha \longrightarrow I \subseteq \mathbb{R}$  es un homeomorfismo. En efecto, como  $\bar{\varphi} = \varphi_1|_{\alpha}$  y  $\varphi_1$  es homeomorfismo se tiene que  $\bar{\varphi}$  es homeomorfismo sobre su imagen.

Como  $\varphi(\alpha) = I \times \{y_0\}$ , se tiene que,  $\bar{\varphi}(\alpha) = I$  de ahí, la afirmación.

Sea  $\mathcal{B}(M) = \{\bar{\varphi} : \alpha \longrightarrow I \subseteq \mathbb{R} : \alpha \subseteq \Gamma \text{ es curva integral (placa) en } Dom(\varphi), \varphi \in \mathcal{A}_1(M)\}$ .

**Lema 2.4.** Sean  $\bar{\varphi}, \bar{\psi} \in \mathcal{B}(M)$  tales que  $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$ , donde  $Dom(\bar{\varphi}) = \alpha$  y  $Dom(\bar{\psi}) = \beta$

1.  $\bar{\varphi}(\alpha \cap \beta)$  y  $\bar{\psi}(\alpha \cap \beta)$  son abiertos en  $\mathbb{R}^m$
2.  $\bar{\varphi}(\bar{\psi})^{-1} : \bar{\psi}(\alpha \cap \beta) \longrightarrow \bar{\varphi}(\alpha \cap \beta)$  es un difeomorfismo local.

### Prueba

1. Demostremos primero que  $\alpha \cap \beta$  es abierto en  $\alpha$  y abierto en  $\beta$ . En efecto, sean  $\varphi, \psi \in \mathcal{A}_1(M)$  con  $Dom(\varphi) = U$  y  $Dom(\psi) = V$ , tales que

$$\bar{\varphi} = \varphi_1|_{\alpha}$$

$$\bar{\psi} = \psi_1|_{\beta}$$

$\varphi\psi^{-1} : \psi(U \cap V) \longrightarrow \varphi(U \cap V)$  tiene la forma

$$\varphi\psi^{-1}(t, y) = (h_1(t, y), h_2(y)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m-1}$$

con  $(t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m-1}$

Como  $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$ , en particular,

$$\begin{aligned}\varphi\psi^{-1}(t, b) &= (h_1(t, b), h_2(b)) \\ &= (h_1(t, b), y_0)\end{aligned}\tag{2.1}$$

Como  $\psi(\beta \cap U) = \psi(U \cap V \cap \beta) = \psi(U \cap V) \cap (\mathbb{R} \times \{b\})$  y

$$\varphi(\alpha \cap V) = \varphi(U \cap V) \cap (\mathbb{R} \times \{y_0\})$$

luego de (2.1)

$$\begin{aligned}\varphi(\beta \cap V) &= \varphi\psi^1(\psi(\beta \cap U)) \\ &= \varphi\psi^1(\psi(U \cap V)) \cap (\mathbb{R} \times \{b\}) \\ &\subseteq \varphi(U \cap V) \cap (\mathbb{R} \times \{y_0\}) \\ &= \varphi(\alpha \cap V)\end{aligned}$$

i.e.

$$\beta \cap U \subseteq \alpha \cap V$$

Análogamente,

$$\alpha \cap V \subseteq \beta \cap U$$

De esta forma

$$\beta \cap U = \alpha \cap V$$

Pero  $\alpha \cap \beta = \alpha \cap V = \beta \cap U$ ,  $U$  y  $V$ , abiertos en  $\mathbb{R}^m$ , así,  $\alpha \cap \beta$  es abierto en  $\alpha$  y  $\beta$ .

Como  $\bar{\varphi}$  y  $\bar{\psi}$  son homeomorfismos, entonces  $\bar{\varphi}(\alpha \cap \beta)$  y  $\bar{\psi}(\alpha \cap \beta)$  son abiertos en  $\mathbb{R}$ .

2.  $\bar{\varphi}(\bar{\psi})^{-1} : \bar{\psi}(\alpha \cap \beta) \longrightarrow \bar{\varphi}(\alpha \cap \beta)$  es  $C^\infty$ , porque si  $t \in \bar{\psi}(\alpha \cap \beta)$  entonces  $\bar{\varphi}(\bar{\psi})^{-1}(t) = h_1(t, b)$  siempre que  $t \in \bar{\psi}(\alpha \cap \beta)$

Análogamente  $\bar{\psi}\bar{\varphi}^{-1}$  es  $C^\infty$ , por lo tanto  $\bar{\varphi}(\bar{\psi})^{-1}$  es difeomorfismo local.

El lema anterior demuestra la siguiente proposición:

**Proposición 2.8.** *Cada hoja  $\Gamma$  de la  $X$ -foliación determinada por  $\mathcal{A}_1(M)$  es una 1-variedad.*

Consideremos ahora la inclusión  $i : \Gamma \longrightarrow M$ ,  $\Gamma$  con su estructura propia.

**Lema 2.5.**  *$\Gamma$  es una 1-subvariedad inmersa en  $M$ .*

### Prueba

Debemos probar primeramente que  $i : \Gamma \longrightarrow M$  es un morfismo. Considerando las cartas  $\bar{\varphi} \in \mathcal{B}(M)$  y  $\varphi \in \mathcal{A}_1(M)$  en  $\Gamma$  y  $M$  respectivamente, se tiene  $\varphi i \bar{\varphi}^{-1} = id$  que es un morfismo. Luego,  $\Gamma$  es una 1-subvariedad de  $M$ .

Probemos que  $\Gamma$  es una 1-subvariedad inmersa en  $M$ .

Sea

$$\begin{array}{ccc} T_p i : T_p \Gamma & \longrightarrow & T_{i(p)} M \\ \langle p, \bar{\varphi}, s \rangle & \longmapsto & \langle p, \varphi, (\varphi i \bar{\varphi}^{-1})'(\bar{\varphi}(p))[s] \rangle \end{array}$$

Como  $\varphi i \bar{\varphi}^{-1} = id$ ,

$$\langle p, \varphi, (\varphi i \bar{\varphi}^{-1})'(\bar{\varphi}(p))[s] \rangle = \langle p, \varphi, s \rangle$$

De ahí, que si  $\langle p, \varphi, s \rangle = \langle p, \varphi, v \rangle$  entonces  $v = (\varphi\varphi^{-1})'(\varphi(p))[s] = s$ .

Luego,  $\langle p, \overline{\varphi}, s \rangle = \langle p, \overline{\varphi}, v \rangle$  y  $\Gamma$  está inmersa en  $M$ .

Ahora, enunciaremos un corolario del teorema del flujo tubular.

**Proposición 2.9.** *Si  $X$  es un campo vectorial en  $M$  y  $p \in M$  entonces existe una única 1-subvariedad  $\Gamma$  inmersa en  $M$  tal que  $p \in \Gamma$  y  $T_q\Gamma = \mathcal{L}\{X(q)\}$ ,  $\forall q \in \Gamma$ .*

### Prueba

Sea  $p \in M$ , existe  $\Gamma$  una hoja del atlas  $\mathcal{A}_1(M)$  pasando por  $p$ , es decir, una curva integral maximal que, por lo probado en la proposición 2.8 y en el lema 2.5 es una 1-subvariedad inmersa en  $M$  pasando por  $p$ . Sea  $q \in \Gamma$ , entonces  $\langle q, \overline{\varphi}, s \rangle \in T_q\Gamma$  se representa como  $\langle q, \varphi, (s, 0, \dots, 0) \rangle \in T_qM$ . De esta forma,  $s\langle q, \varphi, e^1 \rangle = sX(q) \in T_qM$

Identificando  $T_q\Gamma$  con su imagen via  $Ti$ ,  $i$  la inclusión, se tiene

$$T_q\Gamma = \mathcal{L}\{X(q)\}, \quad \forall q \in \Gamma.$$

**Observación** Las 1-subvariedades  $\Gamma$  inmersas en  $M$  pasando por cada punto  $p \in M$ , al ser hojas determinadas por  $\mathcal{A}_1(M)$  son subconjuntos conexos de  $M$  disjuntos dos a dos (ver proposición 2.7), esto nos permite introducir la siguiente definición:

**Definición 2.10.** *Por una 1-foliación de  $M$  entenderemos una familia de 1-subvariedades inmersas de  $M$  disjuntas dos a dos cuya reunión es  $M$ .*

En este contexto, obtenemos el siguiente resultado fundamental, el cual se desprende con claridad de las proposiciones 2.7, 2.9 y la definición anterior:

**Teorema 2.3.** *Cada campo vectorial  $X : M \longrightarrow TM$ , determina una única 1-foliación de  $M$  cuyas hojas son curvas integrales de  $X$ .*

## Capítulo 3

# Sobre fibrados vectoriales. A modo de conclusión

Pretendemos en este capítulo introducir los conceptos de fibrado y subfibrado vectorial lo que nos permitirá volver a enunciar el teorema del flujo tubular de un modo que resultará ser el caso unidimensional del teorema de Frobenius, así como tener una idea geométrica del Teorema de Frobenius general. En otras palabras el *nuevo* teorema del flujo tubular y la introducción de los objetos geométricos derivados de él nos permitirán apreciar plenamente el sentido geométrico del tipo de problema que resuelve el Teorema de Frobenius.

## 3.1 Sobre fibrados y subfibrados vectoriales

En esta sección nos proponemos introducir los conceptos de fibrado vectorial y subfibrado vectorial a partir de los conceptos de fibrado tangente y subfibrado tangente.

### 3.1.1 Fibrados vectoriales

Recordemos que dada  $M$  una  $m$ -variedad, al determinar el fibrado tangente sobre  $M$  hemos considerado:

- Una aplicación suryectiva

$$\begin{array}{ccc} \rho_M : TM & \longrightarrow & M \\ \langle p, \varphi, v \rangle & \longmapsto & v \end{array}$$

- Una estructura de variedad sobre  $TM$ , con atlas

$$\mathcal{A}(TM) : \{T\varphi : \varphi \in \mathcal{A}(M)\}$$

y pseudogruppo

$$\mathfrak{S}(TM) = \mathfrak{S}(M) \times GL(m)$$

donde, por la construcción, para cada  $\varphi \in \mathcal{A}(M)$  existe

$$\Phi \equiv T\varphi : Dom(\Phi) = \rho_M^{-1}(Dom(\varphi)) \longrightarrow Im(\Phi) = Im(\varphi) \times \mathbb{R}^m$$

de tal modo que si  $\psi \in \mathcal{A}(TM)$  con  $Dom(\varphi) \cap Dom(\psi) \neq \emptyset$  y  $\Psi = T\psi$ , entonces

$$\Psi\Phi^{-1}(x, v) = (\psi\varphi^{-1}(x), \Psi_p\Phi_p^{-1}(v))$$

con  $\Psi_p\Phi_p^{-1} \in GL(m)$ , donde:

$$p = \varphi^{-1}(x)$$

$$\Phi_p = \Phi|_{T_pM} = T\varphi|_{T_pM} = T_p\varphi$$

$$\Psi_p = \Psi|_{T_pM} = T\psi|_{T_pM} = T_p\psi$$

y  $T_pM = \rho_M^{-1}(\{p\})$  con  $\rho_M$  morfismo, tal como se aprecia en el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{\rho_M} & M \\ \downarrow T\varphi & & \downarrow \varphi \\ Im(\varphi) \times \mathbb{R}^m & \xrightarrow{\pi_1} & Im(\varphi) \end{array}$$

pues

$$\begin{aligned} \varphi\rho_M(T\varphi)^{-1}(\varphi(p), v) &= \varphi\rho_M(\langle p, \varphi, v \rangle) \\ &= \varphi(p) \\ &= \pi_1(\varphi(p), v) \end{aligned}$$

y  $\pi_1$  es un morfismo.



$TM$  será el primer ejemplo de lo que definiremos como fibrado vectorial sobre una variedad  $m$ -dimensional  $M$ .

**Definición 3.1 (Fibrado vectorial ).** *Un conjunto  $E$  es llamado fibrado vectorial sobre una variedad  $m$ -dimensional  $M$  con grupo estructural un subgrupo  $G \subseteq GL(k)$  si*

*i. Existe una aplicación suryectiva*

$$\rho : E \longrightarrow M$$

*ii.  $E$  admite una estructura de variedad  $\mathcal{A}(E), \mathfrak{S}(E)$ , tal que para cada  $\varphi \in \mathcal{A}(M)$  existe*

$$\Phi : \text{Dom}(\Phi) = \rho^{-1}(\text{Dom}(\varphi)) \longrightarrow \text{Im}(\Phi) = \text{Im}(\varphi) \times \mathbb{R}^k$$

*donde  $\mathfrak{S}(E) = \mathfrak{S}(M) \times G$  con  $G$  subgrupo de  $GL(k)$ , de tal modo que, si  $\psi \in \mathcal{A}(M)$  y  $\text{Dom}(\varphi) \cap \text{Dom}(\psi) \neq \emptyset$ , entonces*

$$\Psi\Phi^{-1}(x, v) = (\psi\varphi^{-1}(x), \Psi_p\Phi_p^{-1}(v))$$

*donde  $\Psi_p\Phi_p^{-1} \in G \subseteq GL(k)$ , siendo  $\Phi, \Psi$  las correspondientes cartas asociadas a  $\varphi$  y  $\psi$  respectivamente, y*

$$p = \varphi^{-1}(x)$$

$$\Phi_p = \Phi|_{E_p}$$

$$\Psi_p = \Psi|_{E_p}$$

*y  $E_p = \rho^{-1}(\{p\})$ .*

**Ejemplo 3.1.** Sea  $M$  una  $m$ -variedad.  $TM$  es un fibrado vectorial sobre  $M$  con grupo estructural  $GL(m)$

**Proposición 3.1.** En las condiciones de la definición 3.1  $\rho$  es un morfismo de variedades.

### Prueba

Que  $\rho_M$  sea un morfismo, se desprende del siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\rho} & M \\ \Phi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ Im(\Phi) = Im(\varphi) \times \mathbb{R}^k & \xrightarrow{\pi_1} & Im(\varphi) \end{array}$$

pues

$$\varphi \circ \rho = \xi \circ \Phi$$

$$\begin{aligned} \varphi \rho \Phi^{-1}(\varphi(p), v) &= \varphi \rho(v) \\ &= \varphi(p) \\ &= \pi_1(\varphi(p), v) \end{aligned}$$

y  $\pi_1$  es un morfismo.

El teorema del flujo tubular garantiza la existencia de cartas especiales que determinan un  $X$ -atlas 1-foliante de  $M$ , a saber,  $\mathcal{A}_1(M)$  (vea corolario 2.1), en este contexto las cartas de  $\mathcal{A}_1(M)$  llevan localmente  $X$ -curvas integrales pasando por puntos de su dominio en segmentos de recta paralelos al

eje  $e^1$  contenidos en su imagen y recíprocamente. Sea  $\varphi \in \mathcal{A}_1(M)$ , veamos cómo actúa su contraparte  $T\varphi$  sobre subespacios 1-dimensionales contenidos en  $T_qM, q \in M$ .

### 3.1.2 Otro ejemplo de fibrado vectorial

Consideremos  $\hat{X}_q = \{\lambda X(q) : \lambda \in \mathbb{R}\} \subseteq T_qM$ , un subespacio 1-dimensional de  $T_qM$ , y definamos

$$\hat{X} = \bigcup_{q \in M} \hat{X}_q$$

**Proposición 3.2.** *Dada  $\varphi \in \mathcal{A}_1(M)$ , para cada  $q \in \text{Dom}(\varphi)$ ,  $T\varphi$  lleva la recta (sub-espacio unidimensional) de  $T_qM$  generada por  $X(q)$  en la recta paralela al eje  $e^1$  pasando por  $\varphi(q)$ .*

#### Prueba

Por el teorema del flujo tubular se tiene  $X(q) = \langle q, \varphi, e^1 \rangle \quad \forall q \in \text{Dom}(\varphi)$ .

Entonces:

$$\begin{aligned} T\varphi(\lambda X(q)) &= T\varphi(\langle q, \varphi, \lambda e^1 \rangle) \\ &= (\varphi(q), \lambda e^1) \end{aligned}$$

lo cual concluye la prueba de la proposición.

Sabemos por el corolario 2.1 que si  $\varphi, \psi \in \mathcal{A}_1(M)$  el cambio de coordenadas lleva segmentos de recta paralelos al eje  $e^1$  en segmentos de recta

también paralelos al eje  $e^1$ . ¿Cómo actúa el cambio de coordenadas  $T\psi(T\varphi)^{-1}$  sobre las rectas paralelas al eje  $e^1$ ?

**Proposición 3.3 (Un corolario del teorema del flujo tubular).** *En las condiciones del teorema del flujo tubular, sean  $\varphi, \psi \in \mathcal{A}_1(M)$ , entonces  $T\psi(T\varphi)^{-1}$  deja invariante las rectas paralelas al eje  $e^1$ , es decir,*  

$$T\psi(T\varphi)^{-1}(\varphi(p), \mathbb{R} \times \{0\}^{m-1}) = (\psi(p), \mathbb{R} \times \{0\}^{m-1})$$

**Prueba.**

Si  $(v, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R} \times \{0\}^{m-1}$ , entonces

$$\begin{aligned} T\psi(T\varphi)^{-1}(\varphi(p), (v, 0, \dots, 0)) &= T\psi(\langle p, \varphi, (v, 0, \dots, 0) \rangle) \\ &= T_p\psi(\langle p, \varphi, (v, 0, \dots, 0) \rangle) \\ &= T_p\psi[v(\langle p, \varphi, (1, 0, \dots, 0) \rangle)] \\ &= T_p\psi[v(\langle p, \varphi, e^1 \rangle)] \\ &= T_p\psi[vX(p)] \\ &= vT_p\psi(X(p)) \\ &= v(\psi(p), e^1) \\ &= (\psi(p), (v, 0, \dots, 0)) \end{aligned}$$

De esta forma  $T\psi(T\varphi)^{-1}$  deja invariante las rectas paralelas al eje  $e^1$  y finaliza la prueba de la proposición.

**Proposición 3.4.**  $\widehat{X}$  es un fibrado vectorial sobre  $M$  con grupo estructural  $G \subseteq GL(1)$

**Prueba.** Sea

$$\widehat{\rho} : \widehat{X} \longrightarrow M$$

definida por  $\widehat{\rho} = \rho_M|_{\widehat{X}}$  donde  $\rho_M : TM \longrightarrow M$

$\widehat{\rho}$  es **suryectiva**. En efecto, se  $p \in M$ , y  $\varphi \in \mathcal{A}_1(M)$  tal que  $\forall q \in \text{Dom}(\varphi)$  se tiene  $X(q) = \langle q, \varphi, e^1 \rangle$ , en particular,  $X(p) = \langle p, \varphi, e^1 \rangle$ , luego, existe  $X(p) \in \mathcal{L}\{X(p)\} \subseteq \widehat{X}$  tal que

$$\widehat{\rho}(X(p)) = \rho(\langle p, \varphi, e^1 \rangle) = p$$

$\widehat{X}$  admite una estructura de variedad, en efecto, consideremos la aplicación

$$T\varphi|_{\widehat{X}} : \widehat{\rho}^{-1}(\text{Dom}(\varphi)) \longrightarrow \text{Im}(\varphi) \times (\mathbb{R} \times \{0\}^{m-1})$$

Sea  $q \in \text{Dom}(\varphi) \subseteq M$ ,  $\varphi \in \mathcal{A}_1(M)$  por la proposición 3.2 se tiene

$$\begin{aligned} T\varphi|_{\widehat{X}}(X(q)) &= T\varphi|_{\widehat{X}}(\langle q, \varphi, e^1 \rangle) \\ &= (\varphi(q), e^1) \end{aligned}$$

Ahora, definamos el conjunto  $\mathcal{A}(\widehat{X}) = \{\Phi_\varphi : \varphi \in \mathcal{A}_1(M)\}$  donde  $\Phi_\varphi$  está definida por el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\rho}^{-1}(\text{Dom}(\varphi)) & \xrightarrow{T\varphi|_{\widehat{X}}} & \text{Im}(\varphi) \times (\mathbb{R} \times \{0\}^{m-1}) \\ & \searrow \Phi_\varphi & \downarrow (\mathbf{1}, \pi_1) \\ & & \text{Im}(\varphi) \times \mathbb{R} \end{array}$$

Así,  $\Phi_\varphi = (\mathbf{1}, \pi_1) \circ T\varphi|_{\hat{X}}$  y por ser compuesta de biyecciones se tiene que  $\Phi_\varphi$  es biyectiva.

Sean  $\Phi_\varphi, \Phi_\psi \in \mathcal{A}(\hat{X})$  con  $Dom(\Phi_\varphi) \cap Dom(\Phi_\psi) \neq \emptyset$

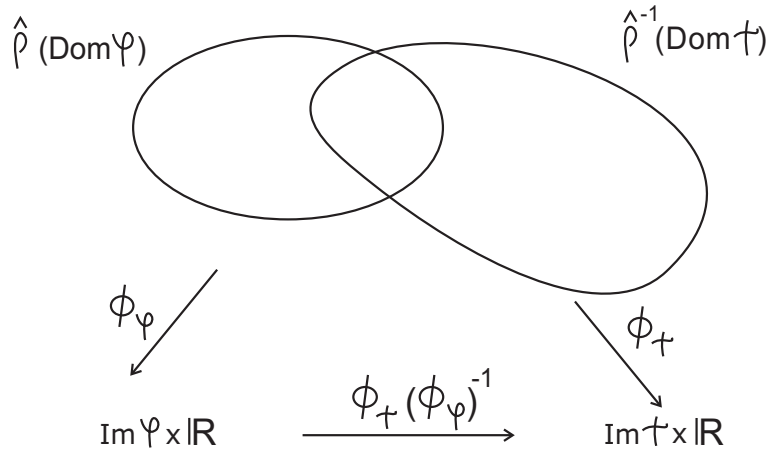


Figure 3.1: El cambio de coordenadas

Sea  $v \in \mathbb{R}$ , por la proposición 3.3 se tiene

$$\Phi_\psi(\Phi_\varphi)^{-1}(\varphi(p), v) = (\psi(p), w)$$

donde  $(w, 0, \dots, 0)$  es el único vector en  $\mathbb{R}^m$  tal que

$$\langle p, \psi, w \rangle = \langle p, \varphi, (v, 0, \dots, 0) \rangle$$

de donde

$$(w, 0, \dots, 0) = (\psi\varphi^{-1})'(\varphi(p))[(v, 0, \dots, 0)]$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
T_p\psi\langle p, \varphi, (v, 0, \dots, 0) \rangle &= T_p\psi(vX(p)) \\
&= vT_p\psi(X(p)) \\
&= v(\psi(p), e^1) \\
&= (\psi(p), (v, 0, \dots, 0))
\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}
(w, 0, \dots, 0) &= (v, 0, \dots, 0) \\
&= (\psi\varphi^{-1})'(\varphi(p))[(v, 0, \dots, 0)]
\end{aligned}$$

donde  $(\psi\varphi^{-1})'(\varphi(p)) \in GL(m)$  y

$$(\psi\varphi^{-1})'(\varphi(p))(\mathbb{R} \times \{0\}) = (\mathbb{R} \times \{0\})$$

Se concluye que

$$\Phi_\psi(\Phi_\varphi)^{-1}(\varphi(p), v) = (\psi\varphi^{-1}(\varphi(p)), (\psi\varphi^{-1})'(\varphi(p))|_{\mathbb{R} \times \{0\}}(v))$$

Definimos

$$GL_1(m) = \left\{ \lambda|_{\mathbb{R} \times \{0\}} : \lambda \in GL(m), \lambda(\mathbb{R} \times \{0\}) = \mathbb{R} \times \{0\} \right\}$$

Identificamos a  $GL_1(m)$  con el subgrupo de  $GL(1)$  generado por  $\{\Phi_\psi(\Phi_\varphi)^{-1} : \varphi, \psi \in \mathcal{A}_1(M)\}$ .

Así, se tiene que el pseudogruppo para  $\widehat{X}$  es el conjunto

$$\mathfrak{S}(\widehat{X}) = \mathfrak{S}(M) \times GL_1(m)$$

Verifiquemos que  $\widehat{\rho}$  es un morfismo. En efecto,

$$\begin{array}{ccc}
 \widehat{X} & \xrightarrow{\widehat{\rho}} & M \\
 \Phi_\varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\
 \text{Im}(\varphi) \times \mathbb{R} & \xrightarrow{\pi_1} & \text{Im}(\varphi) \subseteq \mathbb{R}^m
 \end{array}$$

De este diagrama observamos que

$$\begin{aligned}
 \varphi \widehat{\rho} (\Phi_\varphi)^{-1}(\varphi(p), v) &= \varphi \widehat{\rho}(vX(p)) \\
 &= \varphi(p) \\
 &= \pi_1(\varphi(p), v)
 \end{aligned}$$

Así,  $\widehat{\rho}$  es un morfismo porque localmente es la proyección sobre el primer factor  $\pi_1$ .

De esta forma se tiene que  $\widehat{X}$  es un 1-fibrado vectorial sobre  $M$  con grupo estructural  $G = GL_1(m)$  que se identifica con el subgrupo de  $GL(1)$  generado por  $\{\Phi_\psi(\Phi_\varphi)^{-1} : \varphi, \psi \in \mathcal{A}_1(M)\}$

### 3.1.3 Subfibrado vectorial

De la construcción del 1-fibrado  $\widehat{X}$  de  $TM$  se tiene que la aplicación

$$\widehat{X} \xrightarrow{\widehat{\rho}} M$$

ha sido definida como

$$\widehat{\rho} = \rho|_{\widehat{\rho}}.$$



En este caso se dirá que  $\widehat{X}$  es un 1-subfibrado tangente de  $TM$ ; es decir,  $\widehat{X}$  resultará el primer ejemplo del concepto de subfibrado vectorial que definiremos a continuación:

**Definición 3.2 (Subfibrado vectorial de un fibrado vectorial).** *Dado un fibrado vectorial*

$$E \xrightarrow{\rho} M$$

*sobre una variedad  $m$ -dimensional con grupo estructural  $G \subseteq GL(k)$ .  $F \subseteq E$  es llamado un  $h$ -subfibrado vectorial de  $E$ ,  $1 \leq h \leq k$  si*

$$F \xrightarrow{\rho|_F} M$$

*es un fibrado vectorial con*

$$\mathcal{A}(F) = \{\Phi|_F : \Phi \in \mathcal{A}(E)\}$$

*y pseudogrupo*

$$\mathfrak{S}(F) = \mathfrak{S}(M) \times G_F$$

*donde  $G_F = \{\lambda|\mathbb{R}^k : \lambda \in G, \lambda(\mathbb{R}^k \times \{0\}) = \mathbb{R}^k \times \{0\}\}$*

## 3.2 El teorema unidimensional de Frobenius

La introducción del concepto de subfibrado tangente nos permitirá reenunciar el teorema del flujo tubular de tal forma que resulte el teorema unidimensional de Frobenius, obteniendo el siguiente resultado fundamental:

**Teorema 3.1 (Teorema Fundamental).** *Cada campo vectorial  $X : M \longrightarrow TM$  determina un único 1-subfibrado tangente de  $TM$ , más aún, queda determinada una única 1-foliación de  $M$  cuyas hojas son curvas integrales de  $X$ .*

**Prueba** De acuerdo a las subsecciones 3.1.2 y 3.1.3  $\hat{X} = \bigcup_{q \in M} \hat{X}_q$ , donde  $\hat{X}_q = \{\lambda X(q) : \lambda \in \mathbb{R}\}$  es un subespacio unidimensional de  $T_q M$ , es un 1-subfibrado tangente de  $TM$ , por la construcción hecha en las subsecciones 3.1.2 y 3.1.3 es el único 1-subfibrado tangente de  $TM$  determinado por  $X$ . La segunda parte del teorema es el teorema 2.3. Lo cual finaliza la prueba.

### 3.3 Conclusiones

1. Dado un campo vectorial  $X : M \longrightarrow TM$  y

$$\widehat{X} = \bigcup_{p \in M} \mathcal{L}\{X(p)\} \subseteq TM.$$

Sea  $\rho_{\widehat{X}} : \widehat{X} \longrightarrow M$  el 1-subfibrado tangente de  $M$  determinado por el campo vectorial  $X$ . Lo que el teorema fundamental 3.1 dice es: Existe una única 1-foliación de  $M$ , determinada por  $X$ , tal que las hojas  $\Gamma$  de esa 1-foliación, que son 1-subvariedades inmersas en  $M$  disjuntas dos a dos, tienen la siguiente propiedad:

$$T_q\Gamma = \mathcal{L}\{X(q)\} \quad \forall q \in \Gamma.$$

Generalizemos el caso anterior:

2. Consideremos los campos vectoriales  $X, Y : M \longrightarrow TM$  y

$$E = \bigcup_{p \in M} \mathcal{L}\{X(p), Y(p)\} \subseteq TM.$$

Sea  $\rho_E : E \longrightarrow M$  el 2-subfibrado tangente de  $M$  determinado por los campos vectoriales  $X$  e  $Y$ . Bajo qué condiciones existe una 2-foliación de  $M$  tal que las hojas  $S$  de esa 2-foliación tengan la propiedad :

$$T_qS = \mathcal{L}\{X(q), Y(q)\} \quad \forall q \in S.$$

La generalización al caso  $k$ -dimensional es ahora clara:

3. Consideremos  $X_1, X_2, \dots, X_k : M \longrightarrow TM$  campos vectoriales y

$$E = \bigcup_{p \in M} \mathcal{L}\{X_1(p), X_2(p), \dots, X_k(p)\} \subseteq TM.$$

Sea  $\rho_E : E \longrightarrow M$  el  $k$ -subfibrado tangente de  $M$  determinado por los campos vectoriales  $X_1, X_2, \dots, X_k$ . Bajo qué condiciones existe una  $k$ -foliación de  $M$  tal que las hojas  $S$  de esa  $k$ -foliación tengan la propiedad:

$$T_q S = \mathcal{L}\{X_1(q), X_2(q), \dots, X_k(q)\} \quad \forall q \in S.$$

4. La respuesta a estas dos últimas cuestiones la da el Teorema de Frobenius que establece condiciones suficientes para que un  $k$ -subfibrado tangente sea integrable, es decir,

$$T_q S = \mathcal{L}\{X_1(q), X_2(q), \dots, X_k(q)\} \quad \forall q \in S.$$

En este sentido es claro que el Teorema fundamental 3.1 es la versión unidimensional del Teorema de Frobenius.

# Bibliografía

- [1] Michael Spivak: *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*.

Volumen 1, Publish or Perish, Inc. Berkeley, segunda edición 1979.

- [2] César Camacho y Lins Neto: *Teoria geométrica das folheações*.

Projeto Euclides, Río de Janeiro, 1979.

- [3] Theodor Bröcker y Klaus Janich: *Introducción a la topología diferencial*.

Editorial AC, Madrid, 1977.